改进的最适高斯近似概率假设密度滤波

欧阳成* 陈晓旭 华 云
(电子信息控制重点实验室 成都 610036)

摘 要：最适高斯近似概率假设密度滤波是一种新颖的多机动目标跟踪算法。然而，该算法存在模型概率先验固化问题，即在计算模型概率的过程中量测信息不起作用。针对以上问题，该文提出一种改进算法，通过引入模型概率更新过程，将后验量测信息加入模型概率的计算式中，根据似然函数在多个运动模型之间进行软切换，进而实现对多个机动目标的有效跟踪。实验结果表明，改进算法能够有效解决模型概率先验固化问题，在目标数估计和滤波精度方面均优于传统算法，具有良好的工程应用前景。

关键词：随机集；概率假设密度滤波；最适高斯近似；机动目标跟踪
中图分类号：TN953 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-283X(2013)02-0239-08
DOI: 10.3724/SP.J.1300.2013.13010

Improved Best-fitting Gaussian Approximation PHD Filter

Ouyang Cheng Chen Xiao-xu Hua Yun
(*Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory*, *Chengdu* 610036, *China*)

Abstract: The best-fitting Gaussian approximation Probability Hypothesis Density (PHD) filter is a novel algorithm for multiple maneuvering target tracking. However, there is a problem that the model probabilities are calculated without the measurement innovation. To solve this problem, an improved algorithm is proposed in this paper, which develops an update procedure for model probabilities to employ the posterior measurement innovation to enhance the filtering performance. Then, the dynamic equations can be softly switched among different models according to the likelihood functions. The simulation results show that the improved algorithm has several advantages over the ordinary one with respect to the target number estimation and filtering accuracy, implying good application prospects.

Key words: Random finite sets; Probability Hypothesis Density (PHD) filter; Best-fitting Gaussian approximation; Maneuvering target tracking

1 引言

在机动目标跟踪领域，交互式多模型(Interacting Multiple Model, IMM)算法被认为是迄今为止最有效的算法之一，它通过模型转移概率在多个模型之间进行软切换，可以在计算精度和计算开销上获得比较好的折中[1]。杂波环境中，为了跟踪多个机动目标，常用的方法是将 IMM 分别与联合概率数据关联(Joint Probabilistic Data Association, JPDA)、多假设跟踪(Multiple Hypothesis Tracking, MHT)等算法相结合，构成 IMM-JPDA, IMM-MHT 等算法[2,3]。然而，由于需要计算所有关联事件的概率，这些算法的复杂度随目标或虚警个数的增加呈指数增长，难以应用于工程。

近几年，由于随机集理论的兴起，与其相关的多目标跟踪算法越来越多, 其中最具影响力的是 Mahler[4] 提出的概率假设密度 (Probability Hypothesis Density, PHD)滤波，及其改进算法[5,6]。该滤波算法将复杂的多目标状态空间的运算转换为单目标状态空间内的运算，有效避免了多目标跟踪中复杂的数据关联问题。目前已有的 PHD 实现方法主要包括粒子 PHD[7]和高斯混合 PHD[8]两种形式，后者由于避免了粒子采样以及聚类等操作，在运算效率和状态提取方面更具优势。文献[9]和文献[10]分别将多模型的思想引入粒子 PHD 和高斯混合 PHD 中，以解决多机动目标跟踪问题。然而，传统的多模型 PHD 滤波并不包含输入交互过程，正如文献[10]所述，如何将 IMM 算法引入 PHD 滤波中是一个颇具挑战的问题。最近，文献[11]通过采用粒子拟合目标状态的模型条件 PHD 强度，在粒子 PHD 框架下成功实现了模型输入交互。相应地，文献[12]

2013-02-05 收到，2013-05-02 改回；2013-05-07 网络优先出版
中国博士后科学基金(2012M521713)资助课题
*通信作者： 欧阳成 ouoyc@yahoo.com.cn

通过采用最适高斯近似(the Best-Fitting Gaussian, BFG)法[13]对 IMM 预测性能进行估计，成功将输入交互过程引入高斯混合 PHD 滤波中。然而，研究发现该算法存在模型概率先验固化问题，即在计算模型概率的过程中量测信息不起作用。针对以上问题，本文提出一种改进算法，通过引入模型概率更新过程，充分利用后验信息改善滤波性能。实验结果表明，改进算法能够有效解决模型概率先验固化问题，性能优于传统的 BFG-PHD 滤波，具有良好的工程应用前景。

2 随机有限集及 PHD 滤波

在多目标跟踪中，多目标状态和量测均可用随机有限集(Random Finite Sets, RFS)表示，即 $\boldsymbol{X}_k=\{\boldsymbol{x}_{k,1},\cdots,\boldsymbol{x}_{k,N_k}\}\in\boldsymbol{F}(\chi)$ 为目标状态集，$\boldsymbol{Z}_k=\{\boldsymbol{z}_{k,1},\cdots,\boldsymbol{z}_{k,M_k}\}\in\boldsymbol{F}(Z)$ 为量测集，其中 $\boldsymbol{F}(\chi)$ 和 $\boldsymbol{F}(Z)$ 分别是 χ 和 Z 上的所有有限子集的集合，N_k 和 M_k 分别表示 k 时刻的目标数和量测数。

若 $k-1$ 时刻状态随机集为 $\boldsymbol{X}_{k-1}$，则 k 时刻的状态随机集 $\boldsymbol{X}_k$ 可表示为[8]

$$\boldsymbol{X}_k=\left(\bigcup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}_{k-1}}\boldsymbol{S}_{k|k-1}(\boldsymbol{x})\right)\bigcup\left(\bigcup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}_{k-1}}\boldsymbol{B}_{k|k-1}(\boldsymbol{x})\right)\bigcup\boldsymbol{\Gamma}_k \quad (1)$$

其中，$\boldsymbol{\Gamma}_k$ 表示 k 时刻新生目标状态随机集，$\boldsymbol{B}_{k|k-1}(\boldsymbol{x})$ 表示 k 时刻从目标 $\boldsymbol{x}$ 衍生出来的目标状态随机集，$\boldsymbol{S}_{k|k-1}(\boldsymbol{x})$ 表示从 $k-1$ 时刻到 k 时刻仍然存活的目标状态随机集。

目标的量测随机集 $\boldsymbol{Z}_k$ 可表示为

$$\boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{K}_k\bigcup\left(\bigcup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}_k}\boldsymbol{\Theta}_k(\boldsymbol{x})\right) \quad (2)$$

其中，$\boldsymbol{K}_k$ 表示虚警或杂波量测 RFS，$\boldsymbol{\Theta}_k(\boldsymbol{x})$ 表示源于真实目标的量测 RFS。

由于直接对 $\boldsymbol{X}_k$ 和 $\boldsymbol{Z}_k$ 的联合概率密度函数进行处理复杂度高，且计算量大，Mahler 提出了采用多目标联合概率密度函数的 1 阶矩，即概率假设密度(PHD)，近似描述多目标随机集概率密度[4]。

对于在状态空间 χ 上的一个概率分布函数 $P(\boldsymbol{X})$ 的目标随机集 $\boldsymbol{X}$，定义其 PHD 为 $D(\boldsymbol{x})$，满足

$$\int|\boldsymbol{X}\cap\boldsymbol{S}|P(\mathrm{d}\boldsymbol{X})=\int_{\boldsymbol{S}}D(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (3)$$

令 $D_k(\boldsymbol{x})$ 和 $D_{k|k-1}(\boldsymbol{x})$ 分别表示 k 时刻多目标后验概率密度 $p_k(\boldsymbol{X})$ 和预测概率密度 $p_{k|k-1}(\boldsymbol{X})$ 的 PHD，则 PHD 迭代公式为

$$\begin{aligned}D_{k|k-1}(\boldsymbol{x})=&\int\Pr_{\boldsymbol{S},k}(\boldsymbol{\zeta})\,p_{k|k-1}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\zeta})D_{k-1}(\boldsymbol{\zeta})\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\\&+\int b_{k|k-1}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\zeta})D_{k-1}(\boldsymbol{\zeta})\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}+\gamma_k(\boldsymbol{x})\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}D_k(\boldsymbol{x})=&\left[1-\Pr_{D,k}(\boldsymbol{x})\right]D_{k|k-1}(\boldsymbol{x})\\&+\sum_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}_k}\frac{\Pr_{D,k}(\boldsymbol{x})\,g_k(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x})D_{k|k-1}(\boldsymbol{x})}{\kappa_k(\boldsymbol{y})+\int\Pr_{D,k}(\boldsymbol{\xi})\,g_k(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{\xi})D_{k|k-1}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}\end{aligned} \quad (5)$$

其中，$\Pr_{\boldsymbol{S},k}(\boldsymbol{\zeta})$ 表示 $k-1$ 时刻状态为 $\boldsymbol{\zeta}$ 的目标在 k 时刻的存活概率，$\gamma_k(\cdot)$ 表示 k 时刻新生目标随机集 $\boldsymbol{\Gamma}_k$ 的 PHD，$b_{k|k-1}(\cdot\mid\boldsymbol{\zeta})$ 表示 $k-1$ 时刻状态为 $\boldsymbol{\zeta}$ 的目标在 k 时刻衍生出的目标随机集 $\boldsymbol{B}_{k|k-1}(\boldsymbol{\zeta})$ 的 PHD，$\Pr_{D,k}(\boldsymbol{x})$ 表示 k 时刻状态为 $\boldsymbol{x}$ 的目标检测概率，$\kappa_k(\cdot)$ 表示 k 时刻虚警随机集 $\boldsymbol{K}_k$ 的 PHD，$\boldsymbol{Y}_k$ 表示 k 时刻的量测集。$p_{k|k-1}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\zeta})$ 和 $g_k(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x})$ 分别为单目标模型的状态转移密度和量测密度，满足

$$p_{k|k-1}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\zeta})=N\left(\boldsymbol{x};f_{k-1}(\boldsymbol{\zeta}),\boldsymbol{Q}_{k-1}\right) \quad (6)$$

$$g_k(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x})=N\left(\boldsymbol{y};h_k(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{R}_k\right) \quad (7)$$

其中，$N(x;\boldsymbol{m},\boldsymbol{P})$ 表示均值为 $\boldsymbol{m}$，方差为 $\boldsymbol{P}$ 的高斯分布概率密度函数，$f_{k-1}(\cdot)$ 和 $h_k(\cdot)$ 分别为单个目标的状态转移函数和量测函数，$\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{R}_k$ 分别表示过程噪声和量测噪声的协方差矩阵。

3 最适高斯近似 PHD 滤波

最适高斯近似(BFG)法是一种跳转马尔可夫线性系统(Jump Markov Linear Systems, JMLS)下的 IMM 性能估计方法，其基本思路是将动态模型中的状态转移方程和过程噪声协方差矩阵用一个 BFG 分布进行近似，从而使目标在两种模式下的预测状态具有相同的均值和方差。文献[12]将该算法引入 PHD 滤波中，实现对多个机动目标的有效跟踪。

考虑如下 JMLS 模型：

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{F}_k(r_{k+1})\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{G}_k(r_{k+1})\boldsymbol{w}_k(r_{k+1}) \quad (8)$$

其中，$\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^n$ 表示 k 时刻的目标状态，$\boldsymbol{F}_k(r_{k+1})$ 和 $\boldsymbol{G}_k(r_{k+1})$ 表示模型 r_{k+1} 下的状态转移矩阵，$\boldsymbol{w}_k(r_{k+1})$ 为加性白噪声，满足零均值高斯分布，其协方差矩阵为 $\boldsymbol{Q}_k(r_{k+1})$，模型转移矩阵为 $\boldsymbol{\pi}_{ij}=\Pr\{r_{k+1}=j\mid r_k=i\}$。

BFG 近似即是将式(8)用一个 BFG 分布进行替换

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{w}_k \quad (9)$$

其中，$\boldsymbol{w}_k\sim N(0,\boldsymbol{\Sigma}_k)$，$\boldsymbol{\Sigma}_k$ 是近似后的过程噪声方差。

若将式(8)所示的 JMLS 表示为事件 A，式(9)所示的 BFG 分布表示为事件 B，则算法的关键在于寻找合适的 $\boldsymbol{\Phi}_k$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_k$，使得下式成立

$$E\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid A\}=E\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid B\} \quad (10)$$

$$\mathrm{cov}\{\boldsymbol{x}_k\mid A\}=\mathrm{cov}\{\boldsymbol{x}_k\mid B\} \quad (11)$$

由全概率公式可知

$$E\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid A\}=\sum_{r=1}^{M}E\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid M_{k+1}^{r},A\}\Pr\{M_{k+1}^{r}\mid A\}$$
$$=\sum_{r=1}^{M}p_{k+1,r}\boldsymbol{F}_{k}^{r}E\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}\tag{12}$$

其中，M_{k+1}^{r} 表示 k 到 $k+1$ 时刻之间模型 r 有效的事件，$p_{k+1,r}$ 为事件 M_{k+1}^{r} 的概率。

事件 B 条件下的目标状态期望为

$$E\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid B\}=\boldsymbol{\Phi}_{k}E\{\boldsymbol{x}_{k}\mid B\}\tag{13}$$

对比式(12)和式(13)可知

$$\boldsymbol{\Phi}_{k}=\sum_{r=1}^{M}p_{k+1,r}\boldsymbol{F}_{k}^{r}\tag{14}$$

另一方面，事件 A 条件下的目标状态协方差矩阵为

$$\operatorname{cov}\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid A\}=E\{\operatorname{cov}\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid M_{k+1}^{r},A\}\}$$
$$+\operatorname{cov}\{E\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid M_{k+1}^{r},A\}\}\tag{15}$$

其中，

$$E\{\operatorname{cov}\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid M_{k+1}^{r},A\}\}$$
$$=\sum_{r=1}^{M}p_{k+1,r}\left[\boldsymbol{F}_{k}^{r}\operatorname{cov}\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}(\boldsymbol{F}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{G}_{k}^{r}\boldsymbol{Q}_{k}^{r}(\boldsymbol{G}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}\right]\tag{16}$$

$$\operatorname{cov}\{E\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid M_{k+1}^{r},A\}\}$$
$$=\sum_{r=1}^{M}\left\{p_{k+1,r}\boldsymbol{F}_{k}^{r}E\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}E\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}\right\}$$
$$-\boldsymbol{\Phi}_{k}E\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}E\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{k}^{\mathrm{T}}\tag{17}$$

定义 $\varepsilon_{k}\triangleq E\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}$，$\boldsymbol{\Theta}_{k}\triangleq\operatorname{cov}\{\boldsymbol{x}_{k}\mid A\}$，则由式(15)～式(17)可知

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1}=\sum_{r=1}^{M}p_{k+1,r}\left[\boldsymbol{F}_{k}^{r}(\boldsymbol{\Theta}_{k}+\varepsilon_{k}\varepsilon_{k}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{F}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{G}_{k}^{r}\boldsymbol{Q}_{k}^{r}(\boldsymbol{G}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}\right]-\boldsymbol{\Phi}_{k}\varepsilon_{k}\varepsilon_{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{k}^{\mathrm{T}}\tag{18}$$

$$\varepsilon_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k}\varepsilon_{k}\tag{19}$$

另一方面，由式(9)和式(15)可知，

$$\operatorname{cov}\{\boldsymbol{x}_{k+1}\mid B\}=\boldsymbol{\Phi}_{k}\operatorname{cov}\{\boldsymbol{x}_{k}\mid B\}\boldsymbol{\Phi}_{k}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Sigma}_{k}\tag{20}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k}=\boldsymbol{\Theta}_{k+1}-\boldsymbol{\Phi}_{k}\boldsymbol{\Theta}_{k}\boldsymbol{\Phi}_{k}^{\mathrm{T}}\tag{21}$$

由式(14)和式(21)分别求得 $\boldsymbol{\Phi}_{k}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{k}$ 后，将其带入式(9)，即可将式(8)所示的多模型状态估计问题转变为一个单模型状态估计问题，其中的模型概率 $p_{k+1,r}$ 按下式进行迭代计算

$$p_{k+1,r}=\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{\pi}_{ir}p_{k,i}\tag{22}$$

其中，$\boldsymbol{\pi}_{ir}$ 表示马尔可夫跳转矩阵。

此后的 PHD 预测更新过程与传统的单模型 PHD 滤波完全一致，不同之处仅在于状态转移矩阵和过程噪声协方差矩阵需分别用 BFG 近似的 $\boldsymbol{\Phi}_{k}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{k}$ 进行替换，简单起见，本文不再赘述。

4　改进算法

文献[13]提出 BFG 算法的初衷是为了计算 JMLS 的克拉美罗下界(Posterior Cramer-Rao Lower Bound, PCRLB)。对于单模型线性系统而言，可直接对其 Fisher 信息矩阵(FIM)求逆

$$C_{k}\triangleq E\left[\left(\boldsymbol{X}_{k}-\widehat{\boldsymbol{X}}_{k}\right)\left(\boldsymbol{X}_{k}-\widehat{\boldsymbol{X}}_{k}\right)^{\mathrm{T}}\right]\geq J_{k}^{-1}\tag{23}$$

$$J_{k+1}=\left(\boldsymbol{\Phi}_{k}J_{k}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{k}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Sigma}_{k}\right)^{-1}+J_{Z}(k+1)\tag{24}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_{k}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{k}$ 分别为 BFG 估计的状态转移矩阵和过程噪声协方差矩阵，$J_{Z}(k)$ 仅取决于量测噪声方差，与似然函数无关。

由于 PCRLB 给出的是估计性能下界，不需要计算具体的似然函数，因此 BFG 算法中的模型概率计算公式中只包含预测过程，而缺乏更新过程。文献[12]将 BFG 算法直接应用于 PHD 滤波中，固然可以解决模型输入交互问题，但在计算模型概率时沿用了 BFG 中的方法。换句话说，只需给定一个模型概率初值，就可根据式(22)迭代计算出整个跟踪过程的模型概率值，我们称其为模型概率先验固化问题。本节针对该问题提出一种改进算法，通过引入模型概率更新过程，利用后验信息改善滤波性能。

预测　设 k 时刻的后验 PHD 强度和 $k+1$ 时刻的新生目标 PHD 强度分别为 $v_{k}(x)$ 和 $\gamma_{k+1}(x)$

$$v_{k}(x)=\sum_{j=1}^{J_{k}}w_{k}^{j}N(x;\boldsymbol{m}_{k|k}^{j},\boldsymbol{P}_{k|k}^{j})\tag{25}$$

$$\gamma_{k+1}(x)=\sum_{j=1}^{J_{\gamma,k+1}}w_{\gamma,k+1}^{j}N(x;\boldsymbol{m}_{\gamma,k+1}^{j},\boldsymbol{P}_{\gamma,k+1}^{j})\tag{26}$$

其中，J_{k} 和 $J_{\gamma,k+1}$ 表示高斯分量数，$w_{k|k}^{j}$ 和 $w_{\gamma,k+1}^{j}$ 表示高斯分量的权值。

设 k 时刻第 j 个高斯分量模型为 i 的概率为 $p_{k,i}^{j}$，则 $k+1$ 时刻的预测 PHD 强度为 $v_{k+1|k}(x)$

$$v_{k+1|k}(x)=v_{\boldsymbol{S},k+1|k}(x)+\gamma_{k+1}(x)\tag{27}$$

$$v_{\boldsymbol{S},k+1|k}(x)=p_{\boldsymbol{S},k+1}\sum_{j=1}^{J_{k}}w_{k}^{j}N(x;\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{S},k+1|k}^{j},\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{S},k+1|k}^{j})\tag{28}$$

其中，$\gamma_{k+1}(x)$ 如式(26)所示，$p_{\boldsymbol{S},k+1}$ 为目标存活概率，

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{S},k+1|k}^{j}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j}\boldsymbol{m}_{k|k}^{j}\tag{29}$$

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{S},k+1|k}^{j}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j}\boldsymbol{P}_{k|k}^{j}(\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{j}\tag{30}$$

其中，

$$\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j}=\sum_{r=1}^{M}p_{k+1|k,r}^{j}\boldsymbol{F}_{k}^{r}\tag{31}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{j}=\sum_{r=1}^{M}p_{k+1|k,r}^{j}\Big[\boldsymbol{F}_{k}^{r}(\boldsymbol{P}_{k|k}^{j}+\boldsymbol{m}_{k|k}^{j}(\boldsymbol{m}_{k|k}^{j})^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{F}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{G}_{k}^{r}\boldsymbol{Q}_{k}^{r}(\boldsymbol{G}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}\Big]-\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j}\boldsymbol{m}_{k|k}^{j}(\boldsymbol{m}_{k|k}^{j})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j}\boldsymbol{P}_{k|k}^{j}(\boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^{j})^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

$$p_{k+1|k,r}^{j}=\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{\pi}_{ir}p_{k,i}^{j} \tag{33}$$

其中，$\boldsymbol{F}_{k}^{r}$ 和 $\boldsymbol{G}_{k}^{r}$ 为模型 r 下的状态转移矩阵，$\boldsymbol{Q}_{k}^{r}$ 为其过程噪声协方差矩阵，$\boldsymbol{\pi}_{ir}$ 为马尔可夫跳转矩阵，M 为模型数。

更新 设 $k+1$ 时刻的预测 PHD 强度为 $v_{k+1|k}(x)$，

$$v_{k+1|k}(x)=\sum_{j=1}^{J_{k+1|k}}w_{k+1|k}^{j}N(x;\boldsymbol{m}_{k+1|k}^{j},\boldsymbol{P}_{k+1|k}^{j}) \tag{34}$$

则经过量测更新的后验 PHD 强度为

$$v_{k+1}(x)=(1-p_{D,k+1})v_{k+1|k}(x)+\sum_{z\in Z_{k+1}}v_{D,k+1}(x;z) \tag{35}$$

其中，

$$v_{D,k+1}(x;z)=\sum_{j=1}^{J_{k+1|k}}w_{k+1}^{j}(z)N(x;\boldsymbol{m}_{k+1}^{j}(z),\boldsymbol{P}_{k+1}^{j}) \tag{36}$$

$$w_{k+1}^{j}(z)=\frac{p_{D,k+1}w_{k+1|k}^{j}q_{k+1}^{j}(z)}{\kappa_{k+1}(z)+p_{D,k+1}\sum_{l=1}^{J_{k+1|k}}w_{k+1|k}^{l}q_{k+1}^{l}(z)} \tag{37}$$

$$q_{k+1}^{j}(z)=N(z;\hat{z}_{k+1|k}^{j},\boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{P}_{k+1|k}^{j}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_{k+1}) \tag{38}$$

$$\boldsymbol{m}_{k+1}^{j}(z)=\boldsymbol{m}_{k+1|k}^{j}+\boldsymbol{K}_{k+1}^{j}(z-\hat{z}_{k+1|k}^{j}) \tag{39}$$

$$\hat{z}_{k+1|k}^{j}=\boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{m}_{k+1|k}^{j} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}^{j}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_{k+1}^{j}\boldsymbol{H}_{k+1})\boldsymbol{P}_{k+1|k}^{j} \tag{41}$$

$$\boldsymbol{K}_{k+1}^{j}=\boldsymbol{P}_{k+1|k}^{j}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{P}_{k+1|k}^{j}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_{k+1})^{-1} \tag{42}$$

更新后的第 j 个高斯分量模型为 r 的概率为

$$p_{k+1,r}^{j}=\frac{p_{k+1|k,r}^{j}q_{k+1,r}^{j}(z)}{\sum_{r=1}^{M}p_{k+1|k,r}^{j}q_{k+1,r}^{j}(z)} \tag{43}$$

其中，

$$q_{k+1,r}^{j}(z)=N(z;\hat{z}_{k+1|k,r}^{j},\boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{P}_{k+1|k,r}^{j}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_{k+1}) \tag{44}$$

$$\hat{z}_{k+1|k,r}^{j}=\boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{F}_{k}^{r}\boldsymbol{m}_{k|k}^{j} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1|k,r}^{j}=\boldsymbol{F}_{k}^{r}\boldsymbol{P}_{k|k}^{j}(\boldsymbol{F}_{k}^{r})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{G}_{k}^{r}\boldsymbol{Q}_{k}^{r}(\boldsymbol{G}_{k}^{r})^{\mathrm{T}} \tag{46}$$

由式(33)和式(43)可以看出，改进算法对于模型概率的计算包括预测和更新两个步骤，其中预测过程与 BFG 算法相同，但更新过程则需要用到每个高斯分量的似然函数，由于后验量测信息的引入，模型概率先验固化问题得以有效解决。

值得注意的是，本文算法与文献[12]中算法一样，都只适用于马尔可夫线性系统。此处的“线性”仅仅是指，状态转移方程需满足线性条件，而对于量测方程则没此限制。因此，对于量测方程非线性的系统，可考虑将算法中的卡尔曼滤波(Kalman Filter, KF)替换为无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)或高斯粒子滤波(Gaussian Particle Filter, GPF)等非线性高斯滤波算法，以改善滤波性能。

5 仿真实验与分析

研究 2 维空间中一定区域内相继出现消失的 8 个机动目标，真实目标航迹如图 1 所示。整个观测过程持续 60 帧，采样周期为 $T=1\,\mathrm{s}$。每个目标在 k 时刻的状态用一个 4 维向量表示 $\boldsymbol{x}_k=[x_k,\dot{x}_k,y_k,\dot{y}_k]^{\mathrm{T}}$，其中，$(x_k,y_k)$ 和 $(\dot{x}_k,\dot{y}_k)$ 分别表示目标的位置和速度。采用 5 个运动模型对目标运动过程进行描述，均满足如下状态转移方程

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{\Gamma}w_k$$

其中，

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\sin(\omega T)}{\omega} & 0 & -\dfrac{1-\cos(\omega T)}{\omega}\\ 0 & \cos(\omega T) & 0 & -\sin(\omega T)\\ 0 & \dfrac{1-\cos(\omega T)}{\omega} & 1 & \dfrac{\sin(\omega T)}{\omega}\\ 0 & \sin(\omega T) & 0 & \cos(\omega T)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}T^2/2 & 0\\ T & 0\\ 0 & T^2/2\\ 0 & T\end{bmatrix}$$

5 个模型的过程噪声协方差矩阵均为 $\boldsymbol{Q}_k=\mathrm{diag}([0.001,0.001])$，但转弯角速率各不相同，模型 1 的转弯角速率为 $\omega_1=0$，即匀速直线运动，模型 2

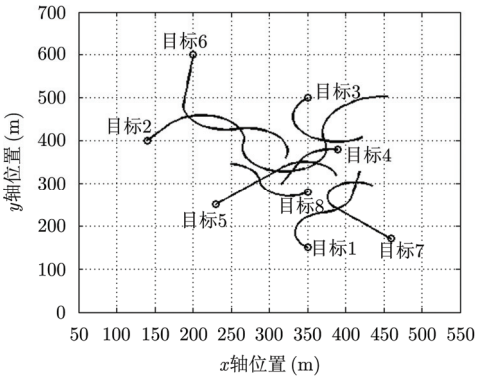

图 1 真实目标航迹（∘表示航迹起点）

Fig. 1 True target trajactories (“∘”, the initials)

为 $\omega_2 = 0.1$，模型 3 为 $\omega_3 = -0.1$，模型 4 为 $\omega_4 = 0.2$，模型 5 为 $\omega_5 = -0.2$。除模型 1 的初始概率为 0.8 以外，其余 4 个模型的初始概率均为 0.05，马尔可夫跳转矩阵为

$$\boldsymbol{\pi}_{ir} = \begin{bmatrix} 0.900 & 0.025 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.900 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.025 & 0.900 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.025 & 0.025 & 0.900 & 0.025 \\ 0.025 & 0.025 & 0.025 & 0.025 & 0.900 \end{bmatrix}$$

传感器位置为坐标原点，量测方程为

$$\boldsymbol{z}_k = \begin{pmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \arctan(y_k / x_k) \end{pmatrix} + v_k$$

其中，

$$v_k \sim N\left(0, \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}\right)$$

σ_r^2 和 σ_θ^2 分别为距离和角度方差，试验中取 $\sigma_r = 1$，$\sigma_\theta = 0.01$。

简单起见，不考虑目标衍生过程，新生目标随机集取为目标真实起始位置，采用扩展卡尔曼算法进行滤波。仿真中设置最大高斯分量数为 $J_{\max} = 50$，修剪门限为 $T_{\mathrm{p}} = 0.001$，合并门限为 $U = 4$。检测概率 $p_{\mathrm{D}} = 0.99$，目标存活概率为 $p_{\mathrm{S}} = 0.95$。杂波数服从均值为 20 的泊松分布，在视场内均匀分布。

图 2 所示为文献[12]算法中目标 2 的模型概率转移曲线。可以看出，由于原算法中的模型概率先验固化问题，只需给定一个初始模型概率以及马尔可夫跳转矩阵 $\boldsymbol{\pi}_{ir}$，就可根据式(22)将所有时刻的模型概率迭代计算出来，因此无法根据后验量测信息对模型进行软切换。

图 3 所示为改进算法中目标 2 的模型概率转移曲线。可以看出，由于模型概率更新过程的加入，模型概率先验固化问题得以有效解决，因此，改进算法可以在跟踪过程中充分利用后验量测信息，在多个运动模型之间进行软切换。

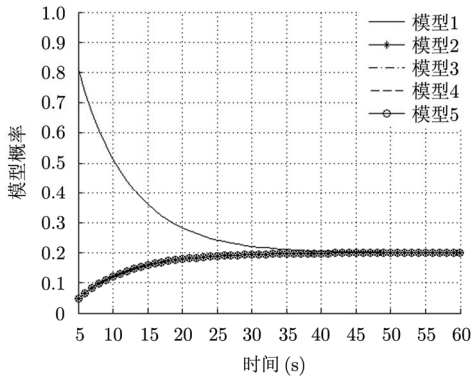

图 2 原算法中目标 2 的模型概率转移曲线

Fig. 2　Model transfer probabilities of Target 2 in the origin algorithm

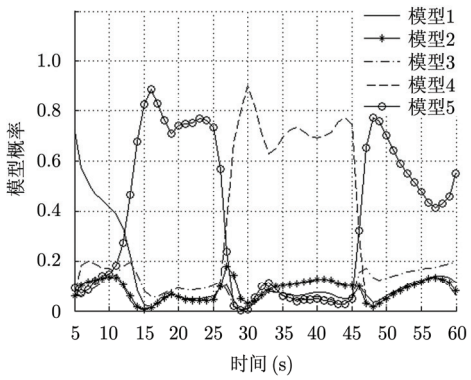

图 3 改进算法中目标 2 的模型概率转移曲线

Fig. 3　Model transfer probabilities of Target 2 in the improved algorithm

图 4 所示为原算法的单次仿真结果。可以看出，由于跟踪过程中无法对模型进行有效切换，当目标发生机动时，跟踪误差较大，且容易丢失目标。

图 5 所示为改进算法的单次仿真结果。可以看出，由于跟踪过程中能够充分利用后验量测信息，实现多个模型之间的软切换，当目标发生机动时，跟踪误差较小，且不容易丢失目标。

采用文献[14]中的估计与航迹关联算法生成目标航迹，图 6 和图 7 分别为原算法和改进算法得到的时间轴跟踪轨迹，同样可以说明问题。

为统计不同算法的平均性能，进行 500 次蒙特卡洛(Monte Carlo, MC)实验，采用目标数估计均值方差和 OSPA 脱靶距离对不同算法的性能进行评价，OSPA 距离的计算式如下[15]：

$$\bar{d}_p^{(c)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}) = \left(\frac{1}{n}\left(\min_{\pi\in\Pi_n}\sum_{i=1}^{m} d^{(c)}\left(x_i, z_{\pi(i)}\right)^p + c^p(n-m)\right)\right)^{1/p}$$

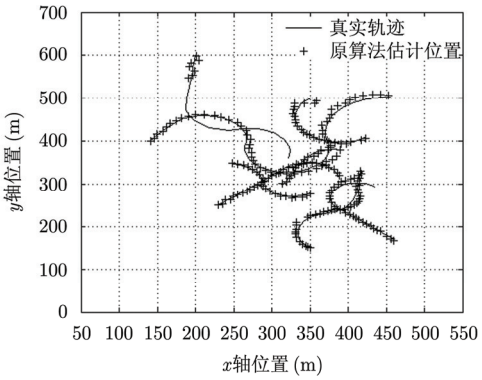

图 4 原算法的单次仿真结果

Fig. 4　Single test result of the origin algorithm

其中，参数设置为 $p=2, c=100$ 。

图 8 和图 9 分别为原算法和改进算法的目标数估计性能。可以看出，原算法的目标丢失现象较为严重，目标数估计性能整体较差，而改进算法的目标数估计更加准确，且方差较小，鲁棒性更强。

图 10 所示为不同算法的 OSPA 距离对比。可以看出，改进算法在目标数估计和滤波精度方面均优于文献[12]中算法，具有良好的工程应用价值。

表 1 所示为不同检测概率下的综合性能对比。可以看出，随着检测概率的降低，两种算法的性能均有所下降，但总体来看，改进算法的 OSPA 距离更小，目标数估计均值更大，标准差更小，平均跟踪误差更小，表现出更好的综合性能。

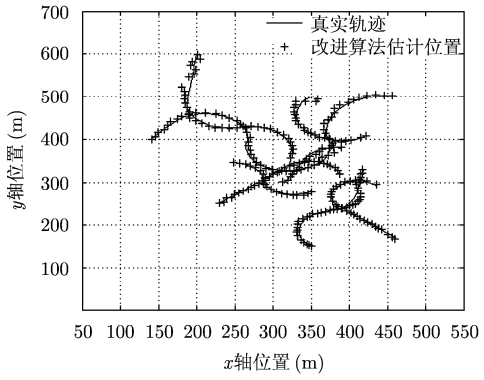

图 5 改进算法的单次仿真结果

Fig. 5 Single test result of the improved algorithm

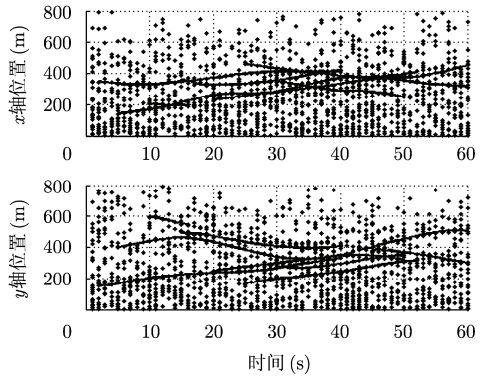

图 6 原算法时间轴跟踪轨迹(“•”量测，“——”航迹)

Fig. 6 Target trajactories versus time axis of the origin algorithm (“•”, the measurements, “——”, the trajactories)

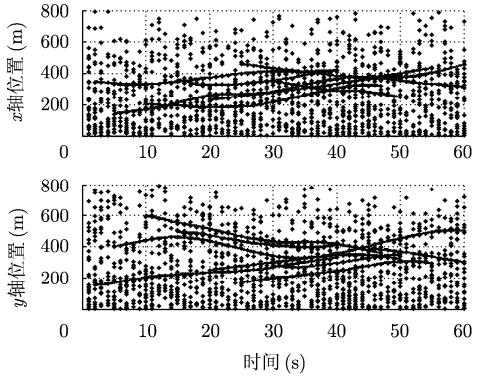

图 7 改进算法时间轴跟踪轨迹 (“•”量测，“——”航迹)

Fig. 7 Target trajactories versus time axis of the improved algorithm (“•”, the measurements, “——”, the trajactories)

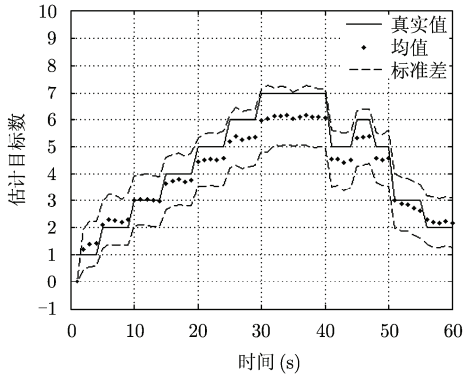

图 8 原算法的目标数估计性能

Fig. 8 Target number estimation of the origin algorithm

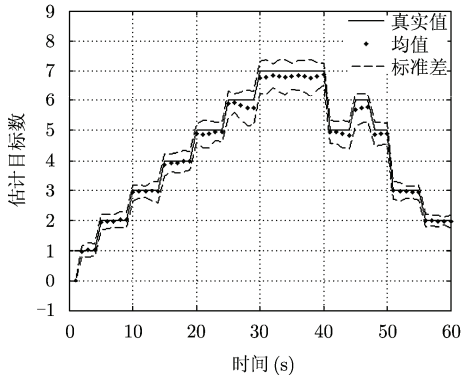

图 9 改进算法的目标数估计性能

Fig. 9 Target number estimation of the improved algorithm

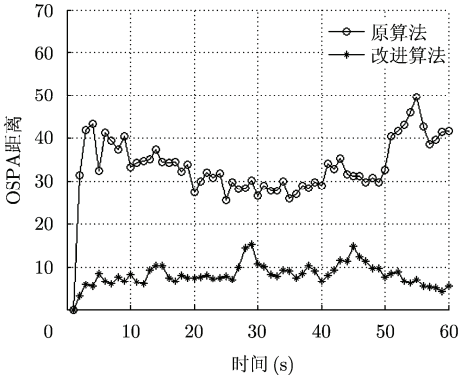

图 10 不同算法的 OSPA 距离对比

Fig. 10 OSPA distances of different algorithms

表 1 不同检测概率下的综合性能对比

Tab. 1 Performance comparison under the conditons of different detection probabilities

性能参数	$p_{\mathrm{D}}=0.99$		$p_{\mathrm{D}}=0.95$		$p_{\mathrm{D}}=0.90$	
	原算法	改进算法	原算法	改进算法	原算法	改进算法
平均 OSPA 距离	33.32	8.15	40.49	9.80	50.59	10.31
目标数估计均值	3.96	4.20	3.94	4.16	3.63	4.12
目标数估计标准差	0.96	0.35	1.09	0.37	1.96	1.68
平均跟踪误差(m)	3.02	1.38	3.81	1.54	5.62	2.31

6 结论

BFG-PHD 滤波是一种新颖的多机动目标跟踪算法，能够在高斯混合 PHD 框架下实现不同目标的模型输入交互。然而，该算法存在模型概率先验固化问题，限制了其在工程中的应用。针对以上问题，本文提出一种改进算法，通过引入模型概率更新过程，根据后验量测信息对模型概率进行调整，从而能够更好地跟踪多个机动目标。实验结果表明，改进算法能够有效解决模型概率先验固化问题，性能优于传统的 BFG-PHD 滤波，具有良好的工程应用前景。然而，本文考虑的仿真场景还比较简单，新生目标随机集取为目标真实起始位置，且没有考虑目标衍生过程。接下来，需要在新生目标随机集未知且包含目标衍生过程的环境下，进一步验证算法性能。另外，如何将算法应用到多传感器系统中也是今后需要开展的工作。

参 考 文 献

[1] 谭顺成, 王国宏, 王娜. IMM-Singer 模型的机动目标跟踪算法[J]. 火力与指挥控制, 2012, 37(2): 32–34.
Tan Shun-cheng, Wang Guo-hong, and Wang Na. Maneuvering target tracking algorithm based on IMM-Singer model[J]. *Fire Control & Command Control*, 2012, 37(2): 32–34.

[2] 许江湖, 刘忠, 党玲. 集中式自适应网格 IMMJPDA 算法[J]. 舰船科学技术, 2012, 34(1): 67–72.
Xu Jiang-hu, Liu Zhong, and Dang Ling. A centralized multisensor multitarget tracking algorithm based on variable structure multiple-model[J]. *Ship Science and Technology*, 2012, 34(1): 67–72.

[3] Dempster R J, Blackman S S, and Nichols T S. Combining IMM filtering and MHT data association for multitarget tracking[C]. Proceedings of the 29th Southeastern Symposium on System Theory, March 1997: 123–127.

[4] Mahler R. Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1152–1178.

[5] 王品, 谢维信, 刘宗香, 等. 一种非线性 GM-PHD 滤波新方法[J]. 电子学报, 2012, 40(8): 1597–1602.
Wang Pin, Xie Wei-xin, Liu Zong-xiang, *et al.*. A novel Gaussian mixture PHD filter for nonlinear models[J]. *Acta Electronic Sinica*, 2012, 40(8): 1597–1602.

[6] Mahler R, Vo B N, and Vo B T. CPHD filtering with unknown clutter rate and detection profile[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(8): 3497–3513.

[7] Vo B N, Singh S, and Doucet A. Sequential Monte Carlo methods for Bayesian multi-target filtering with random finite sets[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, 41(4): 1224–1245.

[8] Vo B N and Ma W K. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4091–4104.

[9] Punithakumar K, Kirubarajan T, and Sinha A. Multiple-model probability hypothesis density filter for tracking maneuvering targets[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(1): 87–98.

[10] Pasha S A, Vo B N, Tuan H D, *et al.*. A Gaussian mixture PHD filter for jump Markov system models[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, 45(3): 919–936.

[11] Ouyang C, Ji H B, and Guo Z Q. Extensions of the SMC-PHD filters for jump Markov systems[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(6): 1422–1430.

[12] Li W L and Jia Y M. Gaussian mixture PHD filter for jump Markov models based on best-fitting Gaussian approximation[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(4): 1036–1042.

[13] Hernandez M L, Ristic B, Farina A, *et al.*. Performance measure for Markovian switching systems using best-fitting Gaussian distributions[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(2): 724–747.

[14] Panta K, Clark D E, and Vo B N. Data association and track management for the Gaussian mixture probability hypothesis density filter[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and*

Electronic Systems, 2009, 45(3): 1003–1016.

[15] Schuhmacher D, Vo B T, and Vo B N. A consistent metric for performance evaluation of multi-object filters[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 3447–3457.

作 者 简 介

欧阳成(1985–)，男，博士后，西安电子科技大学博士毕业，现为中电集团第 29 研究所博士后。研究方向为目标检测与跟踪、多传感器信息融合。

E-mail: ouoyc@yahoo.com.cn

陈晓旭(1976–)，男，工程师，研究方向为信号处理、无源定位技术等。

华 云(1972–)，男，研究员，研究方向为信号处理、无源定位技术等。

“空时自适应处理”专刊征文通知

空时自适应处理 (Space Time Adaptive Processing, STAP)已成为雷达、通信、声纳、导航以及电子对抗等领域的关键技术和重点发展方向，尤其在机载预警雷达、机载战场侦察雷达、机载火控雷达、星载雷达、舰载雷达、天波（地波）超视距雷达的反杂波、抗干扰和目标检测中已体现出重大作用。随着多通道阵列技术和高速实时信号处理芯片的快速发展，STAP 技术将具有更为广阔的军事和商业应用前景。

为了及时总结 STAP 技术的最新研究成果，推动 STAP 技术的发展与应用，《雷达学报》拟在明年初出版“空时自适应处理”专刊，专刊主编为空军预警学院**王永良**教授。

现开始向国内外公开征集专刊论文，诚挚欢迎各位专家、学者和科研人员积极投稿，征文有关事项如下。

一．征文内容

1. 新体制机载/天基雷达空时杂波建模
2. STAP 新理论、新概念与新技术
3. 复杂地貌环境下 STAP
4. 复杂电磁环境下 STAP
5. 空时自适应检测理论与技术
6. 知识辅助 STAP
7. 基于压缩感知的 STAP
8. 共形阵机载雷达 STAP 技术
9. 双/多基地机载雷达 STAP 技术
10. MIMO 体制机载雷达 STAP 技术
11. 分布式机载雷达 STAP 技术
12. 天基/星载雷达 STAP 技术
13. 天波/地波超视距雷达 STAP 技术
14. 合成孔径雷达 STAP 与 GMTI 技术
15. 舰载雷达的 STAP 应用
16. 双频段与宽带雷达的 STAP 应用
17. 认知雷达与 STAP
18. STAP 实时实现技术
19. 其他与 STAP 相关的技术

二．征文要求

1. 观点明确，论据充分，引证准确，文字简练，图表清晰，语言通顺，尚未公开发表，**中英文**皆可。
2. 来稿必须进行**脱密**处理，投稿时提交保密审查表（盖章）。
3. 投稿截止日期：2013 年 8 月 30 日，请在《雷达学报》网站投稿并注明“空时自适应处理”专刊论文。