基于功率聚焦的宽带阵列信号检测算法

龚 斌*① 王 壮① 程 翥②
①(国防科技大学电子科学与工程学院 ATR 实验室 长沙 410073)
②(国防科技大学电子科学与工程学院信号处理实验室 长沙 410073)

摘 要：针对无源侦察系统的实时性应用需求，该文提出了一种基于功率聚焦的宽带阵列信号检测算法。利用均匀线阵接收信号的相位变化信息，通过改进的二重 FFT 算法将各阵元接收信号的功率聚焦到信号到达角 (Direction Of Arrival, DOA)。在此基础上，推导了聚焦后各角度上噪声数据的概率密度函数，构造了具有恒虚警特性的检验统计量和相应的检测门限，并推导了不同虚警率和信噪比条件下的理论检测概率。该算法聚焦过程计算复杂度较小，检测过程不依赖于信号先验信息，检测结果还可为后续的精确角度测量提供初值。仿真实验表明，该算法对弱信号具有较好的检测效果。

关键词：无源侦察；宽带阵列信号；恒虚警检测 (Constant False Alarm Rate, CFAR)；FFT；到达角 (Direction Of Arrival, DOA)
中图分类号：TN971 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-283X(2012)03-0253-09
DOI: 10.3724/SP.J.1300.2012.20049

Wideband Array Signal Detection Algorithm Based on Power Focusing

Gong Bin① Wang Zhuang① Cheng Zhu②
①(*ATR Key Lab*, *College of Electronic Science and Engineering*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *China*)
②(*Signal Processing Lab*, *College of Electronic Science and Engineering*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *China*)

Abstract: Aiming at the requirement of real-time signal detection in the passive surveillance system, a wideband array signal detection algorithm is proposed based on the concept of power focusing. By making use of the phase difference of the signal received by a uniform linear array, the algorithm makes the power of the received signal focused in the Direction Of Arrival (DOA) with improved cascade FFT. Subsequently, the probability density function of the output noise at each angle is derived. Furthermore, a Constant False Alarm Rate (CFAR) test statistic and the corresponding detection threshold are constructed. The theoretical probability of detection is also derived for different false alarm rate and Signal-to-Noise Ratio (SNR). The proposed algorithm is computationally efficient, and the detection process is independent of the prior information. Meanwhile, the results can act as the initial value for other algorithms with higher precision. Simulation results show that the proposed algorithm achieves good performance for weak signal detection.

Key words: Passive surveillance; Wideband array signal; Constant False Alarm Rate (CFAR); FFT; Direction Of Arrival (DOA)

1 引言

信号检测是无源侦察的首要问题，通常情况下，接收端输入信号是多个目标信号源交叠在一起，数目、工作频率、到达方向、到达时间、调制样式、辐射时间、信号强度、相干性等信息一般是未知的，这要求信号检测算法对先验信息具有较低的依赖程度。随着宽带信号在各种平台上的广泛应用，以及阵列天线的不断普及，宽带阵列信号检测问题引起了国内外学者的广泛关注，提出了多种基于不同应用背景的宽带阵列信号检测算法[1−4]。这些算法一般仍然需要利用接收信号的调制样式、信源数目或者相干性等先验信息，而且处理过程比较复杂，难以满足实时性要求。

针对以上问题，空间谱估计理论中将到达角

2012-06-25 收到，2012-07-13 返回；2012-07-17 网络优先出版
国家自然科学基金(11173068)资助课题
*通信作者： 龚斌 gongbin10@sina.com

(Direction Of Arrival, DOA)不同的来波信号进行空域聚焦的思想[5]具有较好的启发性。Ali Akbar Tadaion 等人在文献[6]中提出一种检测策略：先对均匀线阵接收数据运用某种算法进行空域滤波(空域聚焦)，然后将整个空域分成多个角度小区间，并在各个小区间运用极大似然算法进行信号检测，从而将整个空域复杂的多元假设检验问题转化为多个简单的二元假设检验问题，最后把检测出有信号的角度区间作为信号到达角的初始估计。该方法在降低计算复杂度的同时获得了良好的检测性能，但是该文献只针对窄带接收信号进行了分析，而且过宽的角度小区间会降低检测性能。为了切实有效地解决无源侦察中的宽带阵列信号检测问题，本文重点进行了以下两个方面的工作：(1) 设计了适用于宽带阵列信号的空域聚焦算法；(2) 用离散的角度代替角度小区间，并设计了合适的信号检测算法针对聚焦后各个角度上的数据进行二元检测判决。

宽带信号的空域聚焦算法中，比较典型的是相干信号子空间类算法[5,7−9](Coherent Signal Subspace Method, CSSM)，但是其算法结构比较复杂、计算量较大，难以满足实际需求。文献[10]将计算量较小的空时级联处理方法应用于宽带信号处理，通过二重FFT将1维均匀线阵接收的来波信号聚焦到信号到达角上，但是在方位角和信号带宽较大时，聚焦效果较差。本文设计了改进的二重 FFT 算法以改善空域聚焦，通过宽带分解、空域聚焦、空域对齐和空频联合聚焦 4 个步骤将信号功率聚焦到来波信号到达角上，得到各个离散角度上待检测的功率信号。该算法与 CSSM 类算法中性能较优、计算量最小的修正总体最小二乘算法[7](Modified Total Least Square, MTLS)相比，具有结构简单、计算复杂度较小的特点。针对无源侦察时先验信息较少的问题，功率信号的检测采用恒虚警检测(Constant False Alarm Rate, CFAR)算法[11,12]：在分析出噪声数据聚焦后的统计特性的基础上，构造了检验统计量和检测门限，并推导了不同虚警率和信噪比条件下的理论检测概率。

本文引言部分介绍了算法的背景和特点，第 2 节建立了阵列信号模型，第 3 节依次介绍了功率聚焦算法的 4 个步骤，并与 CSSM 类算法比较了计算复杂度，第 4 节分析了噪声聚焦后的统计分布特性并求得了检测门限和理论检测率，第 5 节对聚焦效果和检测性能进行了验证，第 6 节对算法进行了总结。

2 信号模型

假设来波宽带信号可能的频率分布范围为 f_{B}，信号波长 $\lambda\in[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$，其中 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 分别为 f_{B} 内的最小波长和最大波长，本文关注不同方位向上来波信号的检测，采用 1 维均匀线阵接收来波信号，如图 1 所示。

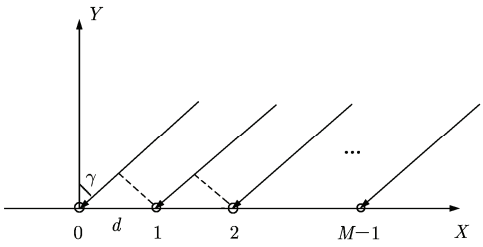

图 1 线阵天线接收信号模型

均匀线阵位于 X 轴上，由 M 个各向同性的天线阵元组成，阵元间距为 $d\le\lambda_{\min}/2$。远场信号到达阵元的方向与 Y 轴的夹角为 γ，其取值范围为 $[-90^\circ,90^\circ]$，且当远场电波由第 1 象限到达阵元 0 时 γ 取负值，由第 2 象限到达时 γ 取正值。均匀线阵天线接收到的一个连续时间段内的信号可表示成如下矩阵：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=[x(h,m)]_{J\times M}\\&=[s(h,m)]_{J\times M}+[n(h,m)]_{J\times M}\\&=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N}\end{aligned}\tag{1}$$

其中，$x(h,m)$ 表示第 m ($m=0,1,2,\cdots,M-1$)个阵元上采样得到的第 h ($h=0,1,2,\cdots,J-1$)个快拍数据，且

$$x(h,m)=s(h,m)+n(h,m)\tag{2}$$

$s(h,m)$ 为来波信号，$n(h,m)$ 为接收端引入的复高斯噪声，其实部 $\mathrm{Re}\big[n(h,m)\big]$ 和虚部 $\mathrm{Im}\big[n(h,m)\big]$ 均服从均值为 0、方差为 $\sigma^2/2$ 的正态分布。

3 功率聚焦算法

由图 1 易知，当来波信号到达角为 γ 时，来波信号矩阵 $\boldsymbol{S}$ 相邻各天线接收数据之间存在相同的时延 $d\sin\gamma/c$ (c 为电磁波传播速度)，而噪声矩阵 $\boldsymbol{N}$ 各列之间不存在这样的时延信息。功率聚焦算法就是利用这一特点，对接收信号矩阵 $\boldsymbol{X}$ 在时域和空域分别作 FFT，将各个频段上的信号功率聚焦到信号到达角附近。

3.1 改进的二重 FFT 算法

文献[10]中的二重FFT算法由于空域FFT长度固定，当 γ 和 f_{B} 较大时，会出现如图 2 所示空域无法对齐的情况。

图 2 的原始接收信号为 3 个带宽为 100 MHz 的线性调频信号，信号中心频率分别为 1.3 GHz, 1.2

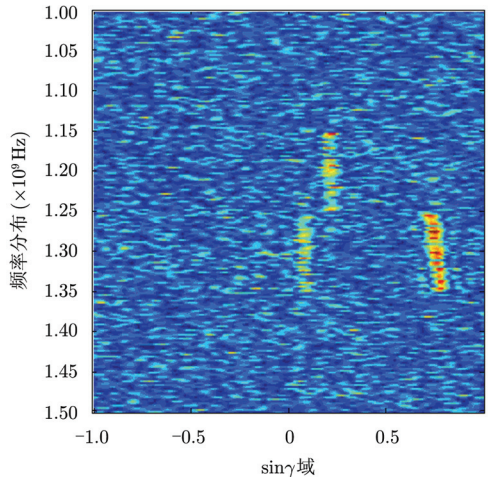

图 2 原始二重 FFT 算法的信号聚焦效果

GHz 和 1.3 GHz，来波方向分别为 5°，15° 和 60°，信噪比分别为为 −15 dB，−15 dB 和 −12 dB，相邻接收阵元间隔 $d=10$ cm。图 2 中信号各到达角处聚焦后的信号没有对齐到相应的 $\sin\gamma$ 域上($\gamma=60°$ 处十分明显)，不利于信号的检出。本文对该二重 FFT 算法的空域 FFT 过程进行了改进，具体包括 4 个步骤 —— 宽带分解、空域聚焦、空域对齐和空频联合聚焦。

(1) 宽带分解

对矩阵 $\boldsymbol{S}$ 而言，各列数据之间的时延在频域上体现为相位差 $\Delta\omega=2\pi d\sin\gamma/\lambda$，为了提取不同窄带上的相位差信息，首先需要进行宽带分解。宽带分解就是对矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的每一列作 FFT(时域 FFT)，各列 FFT 长度为 J，得到频谱矩阵如下：

$$\mathbf{SF}=\left[S(i)e^{j2\pi\frac{md}{\lambda_i}\sin\gamma}\right]_{J\times M} \tag{3}$$

矩阵 **SF** 中各列数据表示各阵元接收的来波信号在 f_{B} 内的离散频谱，其中 $S(i)$ ($i=0,1,\cdots,J-1$) 表示信号在第 i 个窄带上的幅度大小，λ_i 表示第 i 个窄带对应的信号波长。由于来波信号频谱可能没有占满整个 f_{B}，所以 $S(i)$ 的某些值为零。

(2) 空域聚焦

从式(3)可知，矩阵 **SF** 各行上相邻元素的相位相差 $2\pi d\sin\gamma/\lambda_i$，且幅度相同，可以等效地看作信号频率为 $\sin\gamma$ 的单频信号，以等效采样频率 λ_i/d 得到的空间频率采样点。故可以对矩阵 **SF** 每行元素组成的序列分别作 FFT (空域 FFT)，提取出空间频率 $\sin\gamma$。值得注意的是，根据奈奎斯特采样定理，应有下式成立：

$$\lambda_i/d\geq 2|\sin\gamma| \tag{4}$$

由于 $|\gamma|\leq 90°$，考虑极限情况取 $\lambda_i/d\geq 2$，即线阵天线阵元间的间隔 d 应当小于等于接收端信号最高频率对应波长的一半。

在 $\sin\gamma$ 域上取定 M_{ref} 个基准点，并以波长为 $\lambda_{\mathrm{ref}}=2d$ 的频率作为参考窄带，则参考窄带上对应的等效采样频率为 $\lambda_{\mathrm{ref}}/d=2$，空域 FFT 后相邻两点的 $\sin\gamma$ 域间隔为 $\Delta=2/M_{\mathrm{ref}}$。为了达到与参考窄带相同的 $\sin\gamma$ 分辨率，**SF** 各行数据的空域 FFT 长度需要相应变化，第 i 行的 FFT 长度 M_i 可近似地表示为

$$M_i\approx\frac{\lambda_i}{2d}M_{\mathrm{ref}} \tag{5}$$

记 **SF** 第 i 行数据作空域 FFT 后得到的数据为 $\mathbf{BS}_i$，易知其元素个数为 M_i。虽然空域 FFT 后来波信号各窄带上的功率被有效聚焦到各信号到达角上，但是各行数据 $\mathbf{BS}_i$ 长度不同，导致无法在 $\sin\gamma$ 域上对准，因而需要进一步处理。

(3) 空域对齐

根据离散傅里叶变换在频域上的周期特性可知，空域 FFT 后各行数据 $\mathbf{BS}_i$ 的前 $M_{\mathrm{ref}}/2$ 个元素和后 $M_{\mathrm{ref}}/2$ 个元素在 $\sin\gamma$ 域上是对齐的，且后 $M_{\mathrm{ref}}/2$ 个元素对应 $-1\leq\sin\gamma<0$ 区间，前 $M_{\mathrm{ref}}/2$ 个元素对应 $0\leq\sin\gamma<1$ 区间。令 $\mathbf{BS}_i=[\mathrm{BS}(0)\ \ \mathrm{BS}(1)\ \ \cdots\ \ \mathrm{BS}(M_i-1)]$，为了将聚焦后各窄带上相同到达角的信号功率进行对齐，对 $\mathbf{BS}_i$ 进行如下操作：

(a) 将 $\mathbf{BS}_i$ 后 $M_{\mathrm{ref}}/2$ 个元素以原有顺序整体转移到前面，得到

$$\mathbf{CS}_i=[\mathrm{BS}(M_i-M_{\mathrm{ref}}/2)\ \cdots\ \mathrm{BS}(M_i-1)\ \ \mathrm{BS}(0)\cdots\ \mathrm{BS}(M_i-M_{\mathrm{ref}}/2-1)]$$

(b) 提取各行前 M_{ref} 个元素，得到

$$\mathbf{YS}_i=[\mathrm{BS}(M_i-M_{\mathrm{ref}}/2)\ \cdots\ \mathrm{BS}(M_i-1)\ \ \ \mathrm{BS}(0)\cdots\ \mathrm{BS}(M_{\mathrm{ref}}/2-1)]$$

(c) 将 $\mathbf{YS}_i$ 按行序组合，得到对齐后的矩阵：

$$\mathbf{YS}=\begin{bmatrix}\mathbf{YS}_0\\ \mathbf{YS}_1\\ \vdots\\ \mathbf{YS}_{J-1}\end{bmatrix}=[\mathrm{YS}_{i\xi}]_{J\times M_{\mathrm{ref}}} \tag{6}$$

其中 $\xi=0,1,\cdots,M_{\mathrm{ref}}-1$。

在加性噪声环境下，上述的宽带分解、空域滤波和空域对齐过程同样会作用于噪声矩阵 $\boldsymbol{N}$。由于噪声在时域和空域都相互独立，不存在固定的时延信息，其功率不会聚焦到信号到达角上，所以接收信号矩阵 $\boldsymbol{X}$ 经上述 3 个步骤后，各信号到达角上的信噪比会提高，如图 3、图 4 所示。

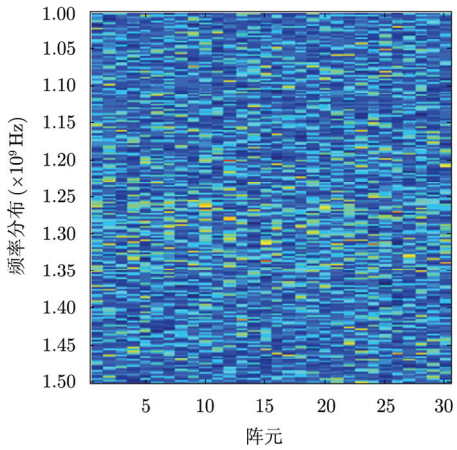

图 3 各阵元接收信号的频谱

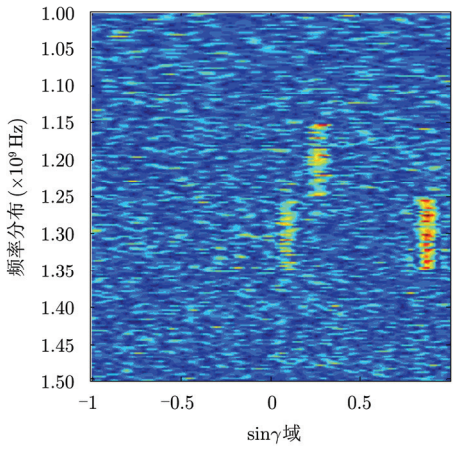

图 4 改进二重 FFT 算法的信号聚焦效果

图 3 和图 4 的原始接收信号与图 2 相同，图 3 为宽带分解后的频谱图，图 4 为图 3 信号经空域滤波和空域对齐后的空频分布，对比两图可以看出，来波信号功率被聚焦到了到达角上，有利于信号的有效检出。对比图 2 和图 4 可以看出，改进后的二重 FFT 算法能将各窄带上的信号聚焦到正确的到达角上，实现了空域对齐。

(4) 空频联合聚焦

一般情况下，来波信号的频谱分布是未知的，需要将信号功率在各角度上合成。记 $\boldsymbol{X}$ 经上述 3 个步骤的处理后得到的数据矩阵为 $\mathbf{YX}=[\mathrm{YX}_{i\xi}]_{J\times M_{\mathrm{ref}}}$，空频联合聚焦就是将 **YX** 的各元素取模、平方并逐行累加，具体过程如下：

(a) **YX** 各元素取模得到 $\mathbf{YX1}=[|\,\mathrm{YX}_{i\xi}\,|]_{J\times M_{\mathrm{ref}}}$；

(b) **YX1** 各元素平方得到 $\mathbf{YX2}=[|\,\mathrm{YX}_{i\xi}\,|^2]_{J\times M_{\mathrm{ref}}}$；

(c) **YX2** 逐行相加得到接收信号功率的空域分布序列 $\boldsymbol{P}_\theta=\{P_{\theta_\xi}\}_{1\times M_{\mathrm{ref}}}$，其中 $P_{\theta_\xi}=\sum_{i=0}^{J-1}|\,\mathrm{YX}_{i\xi}\,|^2$，$\theta_\xi$ 表示将 $\sin\gamma$ 域 $[-1,1]$ 等分成 M_{ref} 个区间时第 ξ 个等分点所对应的角度值。

图 2、图 4 信号经空频联合聚焦后的结果分别如图 5、图 6 所示。

对比图 5 和图 6 可以发现，改进后的二重 FFT 算法能将来波信号功率聚焦到正确的信号到达角上，且合成后的功率值较大，因而更有利于信号的有效检出。

3.2 算法计算复杂度

计算复杂度是影响算法实际应用的关键因素，下面将改进的二重 FFT 算法与 CSSM 类算法中性能较优、计算量最小的 MTLS 算法[7]进行比较。改进的二重 FFT 算法的计算量主要集中在两次 FFT 过程，其中时域 FFT 过程的计算复杂度为 $O(MJ\log_2 J)$，空域 FFT 过程计算复杂度为 $O(M_{\mathrm{ref}}J\log_2 M_{\mathrm{ref}})$，当 M 较大时，可等效为 $O(MJ$

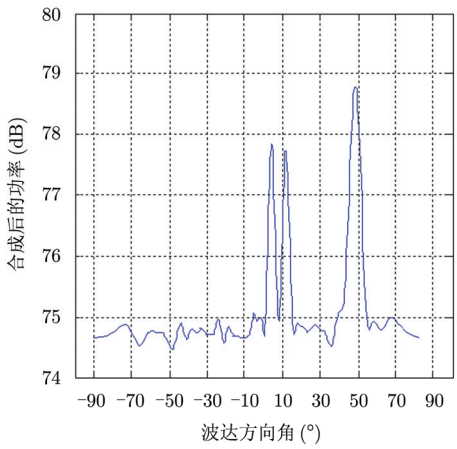

图 5 原始二重 FFT 算法聚焦后的空域功率分布

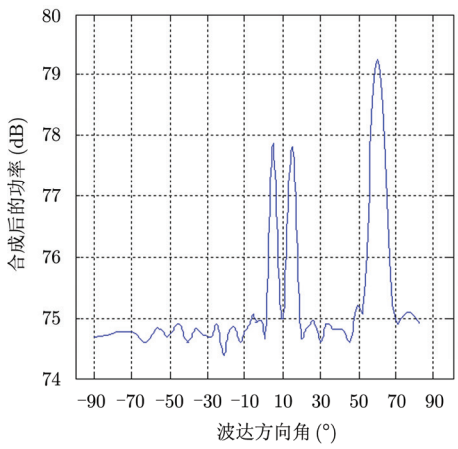

图 6 改进二重 FFT 算法聚焦后的空域功率分布

$\cdot\log_2 M)$，则功率聚焦过程的总计算复杂度为 $O(MJ\log_2 J + MJ\log_2 M)$，其中 $O(\bullet)$表示计算量的阶数[13]。从文献[7,14]可知，MTLS 算法的计算复杂度为 $O(MJ\log_2 J + M^3 + M^2 J)$。因此，在数据量 J 和阵元数 M 较大时，本文功率聚焦算法比 MTLS 算法具有更高的计算效率，如表 1 所示。

表 1 本文聚焦算法与 MTLS 算法的计算量比较

算 法	M=10		M=100	
	J=100	J=1000	J=100	J=1000
MTLS 算法	1.76×10^4	2.01×10^5	2.07×10^6	1.20×10^7
本文聚焦算法	0.99×10^4	1.33×10^5	0.13×10^6	0.17×10^7

4　功率信号检测

接收信号矩阵经功率聚焦后，在信号到达角上会出现较大的功率值，有利于来波信号的检出，而来波信号可能来自任何方位角，所以需要设计合适的检测算法，对聚焦后的功率空域分布序列在各个角度上依次检测判决。当对某个角度上的功率值进行检测判决时，需要利用该角度上功率数据的统计分布特性，所以首先在 4.1 节分析了噪声信号经功率聚焦后的概率密度函数。利用这一概率密度函数，在 4.2 节中构造了恒虚警检测的检验统计量与检测门限，并分析了理论检测率随信噪比的变化情况。

4.1 噪声聚焦后的统计特性

功率聚焦算法是根据来波信号频谱矩阵的特殊结构而设计的，而噪声矩阵 $\boldsymbol{N}$ 也会随矩阵 $\boldsymbol{S}$ 一起进行同样的变换，记矩阵 $\boldsymbol{N}$ 经宽带分解、空域聚焦和空域对齐之后，得到的噪声功率矩阵为

$$\mathbf{YN} = [N_i(\xi)]_{J\times M_{\text{ref}}} \tag{7}$$

其中 $N_i(\xi)$ 为 $\mathbf{YN}$ 的第 i 行第 ξ 列元素。为了分析出噪声空频联合聚焦后的概率密度分布，必须首先对式(7)中各个元素的统计分布以及相互关系逐步分析，主要包括以下 5 个方面。

(1) 时域 FFT 之后各列数据的期望分布

记矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的第 m 列为

$$\boldsymbol{N}_m = \begin{bmatrix} n(0,m) & n(1,m) & n(2,m) & \cdots & n(J-1,m) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

对 $\boldsymbol{N}_m$ 作 J 点 FFT 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{NF}_m &= \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{N}_m \\ &= \begin{bmatrix} N(0,m) & N(1,m) & N(2,m) & \cdots & N(J-1,m) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{F}_1$ 为 FFT 系数矩阵

$$\boldsymbol{F}_1 = \left[e^{-j2\pi\frac{g_1}{J}g_2} \right]_{J\times J} \tag{8}$$

其中 $e^{-j2\pi\frac{g_1}{J}g_2}$ 表示 $\boldsymbol{F}_1$ 的第 g_1 行第 g_2 列元素，且 $g_1, g_2 = 0, 1, \cdots, J-1$。

由于各个阵元引入的噪声均为复高斯白噪声，且各个阵元之间的噪声序列互不相关，则 $E(\boldsymbol{N}_m) = \mathbf{0}_{J\times1}$，$\mathrm{cov}(\boldsymbol{N}_m, \boldsymbol{N}_m) = \sigma^2\boldsymbol{I}_{J\times J}$，其中 $\mathbf{0}_{J\times1}$ 为 $J\times1$ 的零矩阵，σ^2 为复噪声的方差，$\boldsymbol{I}_{J\times J}$ 为单位矩阵。容易求得期望和协方差矩阵为

$$E[\mathbf{NF}_m] = \boldsymbol{F}_1 E[\boldsymbol{N}_m] = \mathbf{0}_{J\times1} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\mathbf{NF}_m, \mathbf{NF}_m] &= E[\mathbf{NF}_m\mathbf{NF}_m^{\mathrm{H}}] \\ &= E[\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{N}_m\boldsymbol{N}_m^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{H}}] \\ &= \sigma^2\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{H}} = J\sigma^2\boldsymbol{I}_{J\times J}\end{aligned} \tag{10}$$

由于 FFT 是线性变换，所以 $N(i,m)$ 满足复高斯分布，又由于上式求得 $\mathbf{NF}_m$ 的协方差矩阵为 $\sigma^2\boldsymbol{I}_{J\times J}$，因而 $\mathbf{NF}_m$ 是均值为 0、方差为 $J\sigma^2$ 的复高斯分布的一个样本集。

(2) 时域 FFT 之后各行数据的期望分布

记矩阵 $\boldsymbol{F}_1$ 的第 i 行为

$$\boldsymbol{F}_{1i} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi\frac{i}{J}1} & e^{-j2\pi\frac{i}{J}2} & \cdots & e^{-j2\pi\frac{i}{J}(J-1)} \end{bmatrix}$$

时域 FFT 后的频谱矩阵第 i 行为 $\mathbf{NF}_i = \begin{bmatrix} N(i,0) & N(i,1) & N(i,2) & \cdots & N(i,M-1) \end{bmatrix}$，则 $N(i,0) = \boldsymbol{F}_{1i}\cdot\boldsymbol{N}_m\big|_{m=0}$，可求得 $N(i,0)$ 的期望均值和方差为

$$E\big[N(i,0)\big] = \boldsymbol{F}_{1i}E[\boldsymbol{N}_m\big|_{m=0}] = 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\big[N(i,0)\big] &= E\big[N(i,0)N^{\mathrm{H}}(i,0)\big] \\ &= E\big[\boldsymbol{F}_{1i}\boldsymbol{N}_m\big|_{m=0}\boldsymbol{N}_m^{\mathrm{H}}\big|_{m=0}\boldsymbol{F}_{1i}^{\mathrm{H}}\big] \\ &= \boldsymbol{F}_{1i}E\big[\boldsymbol{N}_m\big|_{m=0}\boldsymbol{N}_m^{\mathrm{H}}\big|_{m=0}\big]\boldsymbol{F}_{1i}^{\mathrm{H}} \\ &= J\sigma^2\end{aligned} \tag{12}$$

同理可知

$$E\big[N(i,m)\big] = 0 \tag{13}$$

$$\mathrm{var}\big[N(i,m)\big] = J\sigma^2 \tag{14}$$

由于各个阵元间引入的噪声互不相关，所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{cov}\big[N(i,m_1), N(i,m_2)\big] \\ &= E\big[N(i,m_1)N(i,m_2)\big] \\ &= E\big[\boldsymbol{F}_{1i}\boldsymbol{N}_m\big|_{m=m_1}\boldsymbol{N}_m^{\mathrm{H}}\big|_{m=m_2}\boldsymbol{F}_{1i}^{\mathrm{H}}\big] \\ &= 0\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $0 \le m_1, m_2 \le M-1$ 且 $m_1 \ne m_2$，因此

$$\mathrm{cov}\big[\mathbf{NF}_i, \mathbf{NF}_i\big] = E\big[\mathbf{NF}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{NF}_i\big] = J\sigma^2\boldsymbol{I}_{M\times M} \tag{16}$$

根据 i 的任意性可知，时域 FFT 之后的各行数据样本的渐进分布是均值为 0，方差为 $J\sigma^2$ 的复高斯分布。

(3) 空域 FFT 之后相同行上元素之间的相关性

记噪声频谱矩阵的第 i 行数据作 FFT 时的系数矩阵为

$$\boldsymbol{F}_{2i}=\left[e^{-j2\pi\frac{g_1'}{J}g_2'}\right]_{M_i\times M_i}$$

其中 $g_1', g_2'=0,1,\cdots,M_i-1$，而各行的数据量为 M，则由式(5)可知，噪声离散频谱矩阵第 i 行作空域 FFT 时补零的个数为 M_i-M，$\mathbf{NF}_i$ 的空域 FFT 过程可表示如下：

$$\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{F}_{2iM}\ \ \boldsymbol{F}_{2iM'}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}_{2iM}\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}$ 为变换后数据，也即式(7)中矩阵 $\mathbf{YN}$ 的第 i 行，$\boldsymbol{F}_{2iM}$ 和 $\boldsymbol{F}_{2iM'}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{F}_{2i}$ 的前 M 列和后 M_i-M 列，$\mathbf{0}$ 为 $(M_i-M)\times 1$ 维的零向量(补零序列)。则

$$E\left[\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}}\right]=\boldsymbol{F}_{2iM}E\left[\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\right]=\mathbf{0} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\left[\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}}\right]&=E\left[\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{H}}\right]\\&=E\left[\boldsymbol{F}_{2iM}\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}_{2iM}^{\mathrm{H}}\right]\\&=\boldsymbol{F}_{2iM}E\left[\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{F}_{2iM}^{\mathrm{H}}\\&=J\sigma^2\boldsymbol{F}_{2iM}\boldsymbol{F}_{2iM}^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{19}$$

容易证明 $\boldsymbol{F}_{2iM}\boldsymbol{F}_{2iM}^{\mathrm{H}}$ 不是对角矩阵，也即 $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵为非对角阵，其某些元素之间具有一定的相关性，这是由 $\mathbf{NF}_i$ 的线性变换矩阵 $\boldsymbol{F}_{2iM}$ 各行之间不正交导致的。由式(19)可知，空域 FFT 之后同一行上的数据各个元素之间具有一定的相关性。

(4) 空域 FFT 之后不同行上元素的相关性

记 $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_{i1}}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_{i2}}^{\mathrm{T}}$ 分别为空域FFT后的第 i_1，i_2 行数据，其中 $0\le i_1,i_2\le J-1$，且 $i_1\ne i_2$。由 $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}_{2iM}\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}$ 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\left[\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_{i1}}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_{i2}}^{\mathrm{T}}\right]&=E\left[\boldsymbol{F}_{2i_1M}\mathbf{NF}_{i_1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{NF}_{i_2}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}_{2i_2M}\right]\\&=\boldsymbol{F}_{2i_1M}E\left[\mathbf{NF}_{i_1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{NF}_{i_2}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{F}_{2i_2M}\\&=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{20}$$

由式(20)可知，虽然空域 FFT 后得到的矩阵各行的元素个数不相同，但是不同行上的元素之间不相关。

(5) 空域 FFT 之后各个元素的期望分布

由于线性变换不改变分布特性，可知 $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}$ 各个元素的期望分布均为复高斯分布，记 $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{NF}_i}$ 的第 k 个元素为 $Y_N(i,k)$，$\boldsymbol{F}_{2iM}$ 的第 k 行数据为 $\boldsymbol{F}_{2iM(k)}$，易知 $Y_N(i,k)=\boldsymbol{F}_{2iM(k)}\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}$，可求得 $Y_N(i,k)$ 的期望均值和方差为

$$E\left[Y_N(i,k)\right]=\boldsymbol{F}_{2iM(k)}E\left[\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\right]=0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[Y_N(i,k)\right]&=E\left[Y_N(i,k)Y_N^{\mathrm{H}}(i,k)\right]\\&=\boldsymbol{F}_{2iM(k)}E\left[\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{NF}_i^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{H}}\right]\left(\boldsymbol{F}_{2iM(k)}\right)^{\mathrm{H}}\\&=J\sigma^2\boldsymbol{F}_{2iM(k)}\left(\boldsymbol{F}_{2iM(k)}\right)^{\mathrm{H}}\\&=MJ\sigma^2\end{aligned} \tag{22}$$

结合式(21)，式(22)可知，$Y_N(i,k)$ 的期望分布为均值为 0，方差为 $MJ\sigma^2$ 的复高斯分布。

通过上面 5 个方面的分析可知，噪声数据矩阵 $\mathbf{YN}$ 各行中每个元素的实部和虚部的渐进分布为均值为 0、方差为 $MJ\sigma^2/2$ 的正态分布，且各行之间的元素相互独立。记空频联合聚焦过程将 $\mathbf{YN}$ 的各元素取模、平方以及逐行累加后，得到的噪声功率空间分布序列为 $\boldsymbol{P}_N=\{P_{N\theta_\xi}\}_{1\times M_{\mathrm{ref}}}$，其中 $P_{N\theta_\xi}$ 为噪声经功率聚焦后在 θ_ξ 上的功率值，则 $P_{N\theta_\xi}$ 满足自由度为 $2J$ 的 χ^2 分布[12]

$$\begin{aligned}p\left[P_{N\theta_\xi}\right]=&\left[\left(2\sigma_{\mathrm{YN}}^2\right)^{v/2}\Gamma(v/2)\right]^{-1}P_{N\theta_\xi}^{v/2-1}\\&\cdot\exp\left[-P_{N\theta_\xi}/2\sigma_{\mathrm{YN}}^2\right],\quad P_{N\theta_\xi}>0\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $v=2J$，$\sigma_{\mathrm{YN}}^2=MJ\sigma^2/2$，$\Gamma(\bullet)$为伽马函数[12]，令 $L_{N\theta_\xi}=P_{N\theta_\xi}/\sigma_{\mathrm{YN}}^2$，可以将上述的 χ^2 分布标准化，如下所示：

$$\begin{aligned}p\left[L_{N\theta_\xi}\right]=&\left[2^{v/2}\Gamma(v/2)\right]^{-1}\\&\cdot L_{N\theta_\xi}^{v/2-1}\exp\left[-L_{N\theta_\xi}/2\right],\quad L_{N\theta_\xi}>0\end{aligned} \tag{24}$$

4.2 检测门限及理论检测率

由第 3 节可知，功率聚焦后 θ_ξ 上的待检测信号为 P_{θ_ξ}，定义检验统计量为 $T_{\theta_\xi}=P_{\theta_\xi}/\sigma_{\mathrm{YN}}^2$。若某个角度上没有信号，由式(24)可知 $T_{\theta_\xi}\sim\chi_v^2$，其中 χ_v^2 表示自由度 $v=2J$ 的中心化卡方分布；若某个角度上存在信号，容易推导得出检验统计量分布为 $T_{\theta_\xi}\sim\chi_v'^2\left(\rho_{S\theta_\xi}/\sigma_{\mathrm{YN}}^2\right)$，其中 $\rho_{S\theta_\xi}=\sum_{i=0}^{J-1}\left\{\mathrm{Re}^2\left[\mathrm{YS}_{i\xi}\right]+\mathrm{Im}^2\left[\mathrm{YS}_{i\xi}\right]\right\}$，$\chi_v'^2\left(\rho_{S\theta_\xi}/\sigma_{\mathrm{YN}}^2\right)$ 是自由度为 v，非中心化参量为 $\rho_{S\theta_\xi}/\sigma_{\mathrm{YN}}^2$ 的非中心化卡方分布[12]。令 $\lambda_{S\theta_\xi}=\rho_{S\theta_\xi}/\sigma_{\mathrm{YN}}^2$，则 θ_ξ 上的信号检测实际上就是以下的二元假设检验问题

$$\begin{aligned}H_0:&\ T_{\theta_\xi}\sim\chi_v^2\\H_1:&\ T_{\theta_\xi}\sim\chi_v'^2\left(\lambda_{S\theta_\xi}\right)\end{aligned}$$

定义功率聚焦后的信噪比为 $\eta=\rho_{S\theta_\xi}/(v\sigma_{\mathrm{YN}}^2)=\lambda_{S\theta_\xi}/v$[15]，则在一定的信噪比条件下，当 v 已知时，

就可以确定非中心化参数 $\lambda_{S\theta_\xi}$。针对以上假设检验问题，采用恒虚警检测来判决信号的有无，在 H_0 条件下，虚警率为

$$P_{\mathrm{FA}} = Q_{\chi_v^2}\left(T_{\theta_\xi}\right) \tag{25}$$

其中 $Q_{\chi_v^2}(\bullet)$ 表示卡方分布 χ_v^2 的右尾概率。易知，T_{θ_ξ} 满足虚警率水平 α 的检测门限为

$$\vartheta = Q_{\chi_v^2}^{-1}(\alpha) \tag{26}$$

其中 $Q_{\chi_v^2}^{-1}(\bullet)$ 表示卡方分布 χ_v^2 的反右尾概率，则相应的检测率为

$$P_{\mathrm{D}} = Q_{\chi_v'^2\left(\lambda_{S\theta_\xi}\right)}(\vartheta) = Q_{\chi_v'^2\left(\lambda_{S\theta_\xi}\right)}\left(Q_{\chi_v^2}^{-1}(\alpha)\right) \tag{27}$$

当 v ($v \geq 2$)和 α 恒定时，检测率 P_{D} 随着 $\lambda_{S\theta_\xi}$ 的增大而提高。由式 $\eta = \lambda_{S\theta_\xi}/v$ 可知，对 θ_ξ 上的信号而言，要提高检出率，必须尽可能地提高功率聚焦后的信噪比。记单个阵元采样数据的初始信噪比为 η_0，对单个来波信号来说，在理想状况下 —— 采样数据无限长和阵元无限多，根据 FFT 变换的帕斯瓦尔定理，可以推得下式成立

$$\frac{\eta}{\eta_0} \approx M \tag{28}$$

因此，式(27)中的检测概率可表示为

$$P_{\mathrm{D}} = Q_{\chi_v'^2(M\eta_0 v)}\left(Q_{\chi_v^2}^{-1}(\alpha)\right) \tag{29}$$

当 $M = 30$，$J = 1000$ 时，在不同虚警率条件下，P_{D} 的理论值随原始输入信噪比 η_0 的变化曲线如图 7 所示。

从图 7 中可以看出，当阵元数为 30、各阵元接收数据长度为 1000 时，在低虚警率水平和低信噪比条件下，本文的检测算法仍然具有较高的检测率。

5　仿真验证

为验证本文检测算法的效果，下面通过 MATLAB 仿真实验对功率聚焦效果进行分析，并对理论检测率随信噪比的变化情况进行验证，设定仿真条件如下：来波信号可能的频带分布范围 f_{B} 为 1.0～1.5 GHz, 3 个来波信号均为带宽为 100 MHz 的线性调频信号，信号中心频率分别为 1.3 GHz, 1.2 GHz 和 1.3 GHz，来波方向分别为 5°,15° 和 60°，信噪比均为 −20 dB，信号持续时间均为 2 μs；阵元个数 M 为 30，阵元间距 d 为 10 cm，阵元采样频率为 500 MHz；虚警率为 10^{-6}，选择对齐的角度个数 M_{ref} 为 256；复高斯白噪声方差 σ^2 为 1。

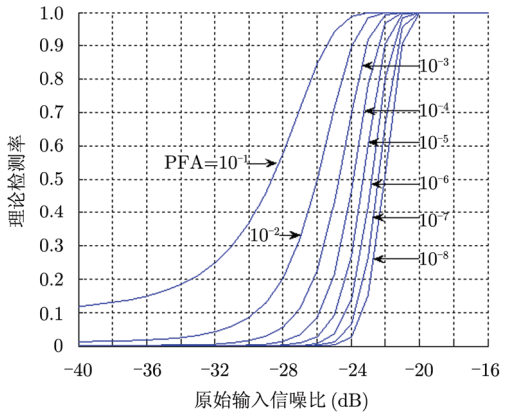

图 7　理论检测率随原始输入信噪比的变化曲线

(1) 功率聚焦效果分析

根据前面的功率聚焦算法和脉冲检测方法，经过 100 次重复实验，得到功率空间分布和检测结果如图 8 和图 9 所示。

从图 8 和图 9 可以看出，在上述的仿真条件下，信号功率被有效聚焦到来波方向附近，且能通过脉冲检测算法被正确检出。有两点需要说明：一是较大方位角上的信号聚焦效果比较小方位角差一些(如图 8 所示)；二是检测出的信号会在一个角度区

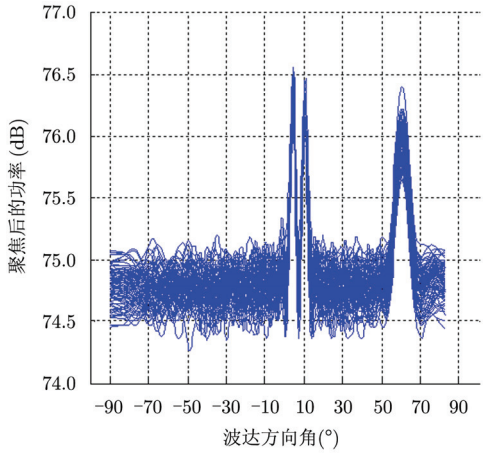

图 8　空域功率分布

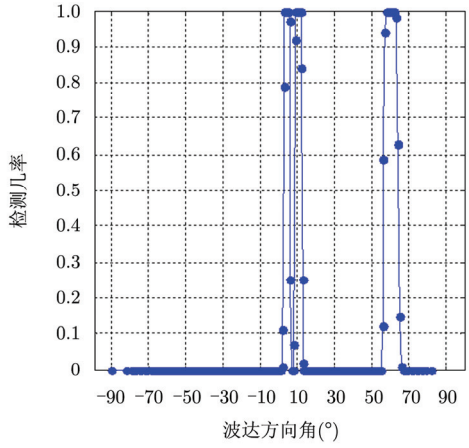

图 9 100 次实验中信号的检测几率

间内，而不是在单一的角度上。前者是因为方位角越大导致天线的等效口径越小，从而导致角度分辨力降低[5]；后者是由于聚焦过程没有实现绝对对齐，信号功率会在来波方向附近的较小区间分布。为了在检测出信号的同时大概估计出信号的来波方向，有以下两种比较简单的方法可以采用：第 1 种方法是首先提取出空间功率分布序列的“尖峰”——大于或等于前后两个功率值的点，然后再用脉冲检测方法进行检测，把检测出有信号的角度作为对来波方向的粗略估计；第 2 种方法是将各个连续检测出有信号的角度区间分别求平均，把这些平均值作为来波方向的粗略估计。由于角度估计不是本文重点关注的问题，所以没有对这两种方法的估计性能进行分析，感兴趣的读者可以进一步研究。

(2) 理论检测率验证

为了比较实际的检测率与理论值之间的差异，通过蒙特卡洛仿真得出了实际的检测率随信噪比的变化曲线，如图 10 (100 次蒙特卡洛仿真)和图 11(1000 次蒙特卡洛仿真)所示。仿真条件基本不变，但是只关注方位角为 60° 信号的检测率，并取定虚警率为10^{-6}。

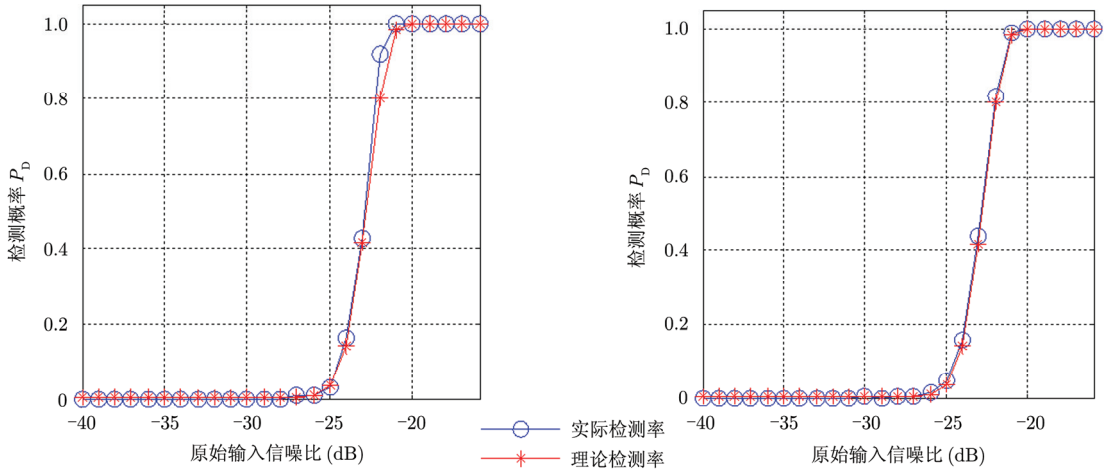

图 10 蒙特卡洛仿真次数为 100

图 11 蒙特卡洛仿真次数为 1000

从图 10 和图 11 可以看出，尽管仿真次数有限，但是实际的检测概率同理论值之间具有较好的趋同性，说明根据式(29)求解的检测概率 P_D 是合理的，可以用来指导解决无源侦察中的宽带阵列信号检测问题。

6 结束语

本文算法利用来波信号大概的频率分布范围这一信息，先将多个较低信噪比来波信号的功率聚焦到信号到达角上，然后通过噪声聚焦后的统计特性构造出恒虚警检测门限对各个角度的功率值进行检测判决，最后分析得到了不同信噪比条件下的理论检测率，并能与仿真结果较好地吻合。本算法计算复杂度较小，且适用于信号先验信息较少的检测背景。此外，检测出有信号的角度能作为信号到达角的初始估计，为后续的精确测角与定位跟踪等过程提供先验信息。本文算法的检测门限获取和理论检测率推导过程基于复高斯噪声背景，对非高斯噪声背景的适用情况有待进一步研究。

参 考 文 献

[1] D'Amico A A. GLRT-Based combining schemes for PPM IR-UWB systems with multiple receive antennas[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(1): 386–396.

[2] Yu Tsung-Han, Sekkat Oussama, and Rodriguez-Parera Santiago, *et al.*. A wideband spectrum-sensing processor with adaptive detection threshold and sensing time[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2011, 58(11): 2765–2775.

[3] Brenneman M T, Morton Y T, and Zhou Q. GPS multipath detection with ANOVA for adaptive arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, 46(3): 1171–1184.

[4] Brenneman M T and Morton Y T. Functional bandwidth criterion for adaptive array performance[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, 46(3): 1226–1234.

[5] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004, 第 8 章.
Wang Yong-liang, Chen Hui, Peng Ying-ning, *et al.*. Theorys and Algorithms of Spatial Spectrum Estimation[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004, Ch. 8.

[6] Tadaion Ali Akbar, Derakhtian Mostafa, Gazor Saeed, *et al.*. A fast multiple-source detection and localization array signal processing algorithm using the spatial filtering and ML

approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(5): 1815–1827.

[7] Shahrokh Valaee, Benoit Champagne, and Peter Kabal. Localization of wideband signal using least-squares and total least-squares approaches[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(5): 1213–1222.

[8] Do-Hong T and Russer P. An analysis of wideband direction-of-arrival estimation for closely-spaced sources in the presence of array model errors[J]. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 2003, 13(8): 314–316.

[9] El-Keyi A and Kirubarajan T. Adaptive beamspace focusing for direction of arrival estimation of wideband signals[J]. *Signal Processing*, 2008, 88(8): 2063–2077.

[10] Allam M and Moghaddamjoo A. Two-dimensional DFT projection for wideband direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(7): 1728–1732.

[11] Wang Zhen and Willett Peter. A performance study of some transient detectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(9): 2682–2685.

[12] Steven M Kay, 罗鹏飞, 张文明, 等. 统计信号处理基础—第二卷: 检测理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2006, 第 11 章.
Steven M Kay, Luo Peng-fei, Zhang Wen-ming, *et al*.. Fundamentals of Statistical Signal Processing—Volume Ⅱ: Detection Theory[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006, Ch. 11.

[13] Anderson E, Bai Z, Bischof C, *et al*.. LAPACK Users' Guide[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999, Ch. 2.

[14] 陈志菲, 孙进才, 侯宏. 宽带DOA估计的类MUSIC波束形成算法[J]. 电子学报, 2011, 39(6): 1257–1260.
Chen Zhi-fei, Sun Jin-cai, and Hou Hong. MUSIC-like beamforming method for wideband DOA estimation[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(6): 1257–1260.

[15] Robert N McDonough, Anthony D Whalen, 王德石, 等. 噪声中的信号检测[M]. 第 2 版, 北京: 电子工业出版社, 2006: 154–158.
Robert N McDonough, Anthony D Whalen, Wang Deshi, *et al*.. Detection of Signal in Noise[M]. Second Edition, Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006: 154–158.

作 者 简 介

龚　斌(1988–)，男，湖南安化人，2010年获西安电子科技大学工学学士学位，现为国防科学技术大学电子科学与工程学院硕士生，研究方向为无源探测信号处理与阵列信号处理。
E-mail: gongbin10@sina.com

王　壮(1973–)，男，江苏镇江人，2001年获国防科学技术大学工学博士学位，现为国防科学技术大学电子科学与工程学院教授，硕士生导师，主要研究方向为空间目标监测、雷达信号处理、数据融合与目标识别等领域，获国家科技进步二等奖 1 项、军队科技进步一等奖 2 项。
E-mail: zhuang_wang@sina.com

程　翥(1974–)，男，江苏如皋人，2002年获国防科学技术大学工学博士学位，现为国防科学技术大学电子科学与工程学院副教授，IEEE 会员，主要研究方向为信号分析与处理，共发表论文 60 余篇，参与撰写专著一部。
E-mail: chengzhu88@gmail.com