

基于移动虚拟插值阵列协方差矩阵快速补全的多目标直接定位方法

王鸿帧^{①④} 王鼎^{*①②} 聂福全^③ 唐涛^①

^①(信息工程大学信息工程学院 郑州 450001)

^②(国家数字交换系统工程技术研究中心 郑州 450002)

^③(河南科技学院 新乡 453000)

^④(解放军93575部队 承德 067000)

摘要: 该文基于互质差分共性阵列研究运动单站的多目标直接定位问题。针对现有基于矩阵范数最小化的运动单站直接定位方法存在虚拟阵元冗余数据利用不充分和运算复杂度高的问题, 该文提出了一种融合虚拟阵元冗余数据平均和协方差矩阵缺失元素快速补全的多目标直接定位方法。该方法引入虚拟阵元冗余数据平均技术构建差分共性阵列, 并结合孔洞零值填充和Toeplitz矩阵重构恢复协方差矩阵的秩, 然后基于核范数与Frobenius范数比值最小化原则, 设计基于自适应阈值策略和Toeplitz约束的交替投影迭代算法, 以实现虚拟阵列协方差矩阵缺失元素的高效补全, 最后应用数据融合算法进行定位。数值仿真表明, 所提方法能够在降低运算复杂度的同时提升定位精度, 尤其在低信噪比和少观测数据场景中表现优异, 有效平衡了定位精度与实时性的需求。

关键词: 互质阵列; 直接定位; 冗余数据平均; 协方差矩阵补全; 凸优化

中图分类号: TN97

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2026)x-0001-18

DOI: 10.12000/JR26006

CSTR: 32380.14.JR26006

引用格式: 王鸿帧, 王鼎, 聂福全, 等. 基于移动虚拟插值阵列协方差矩阵快速补全的多目标直接定位方法[J]. 雷达学报(中英文), 待出版. doi: 10.12000/JR26006.

Reference format: WANG Hongzhen, WANG Ding, NIE Fuquan, *et al.* A multi-target direct localization method based on fast completion of the covariance matrix of the mobile virtual interpolation array[J]. *Journal of Radars*, in press. doi: 10.12000/JR26006.

A Multi-target Direct Localization Method Based on Fast Completion of the Covariance Matrix of the Mobile Virtual Interpolation Array

WANG Hongzhen^{①④} WANG Ding^{*①②} NIE Fuquan^③ TANG Tao^①

^①(School of Information System Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

^②(National Digital Switching System Engineering and Technological Research Center, Zhengzhou 450002, China)

^③(Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang 453000, China)

^④(Unit 93575 of the People's Liberation Army, Chengde 067000, China)

Abstract: This paper addresses the multi-target direct localization problem for moving single stations using the coprime difference co-array. Existing methods based on matrix norm minimization often suffer from underutilization of redundant data from virtual array elements and high computational complexity. To overcome these limitations, we propose a multi-target direct localization approach that combines redundant-data

收稿日期: 2026-01-05; 改回日期: 2026-03-14; 网络出版: 2026-04-20

*通信作者: 王鼎 wang_ding814@aliyun.com *Corresponding Author: WANG Ding, wang_ding814@aliyun.com

基金项目: 国家自然科学基金(62171469, 62071029)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (62171469, 62071029)

责任编辑: 郭福成 Corresponding Editor: GUO Fucheng

©The Author(s) 2026. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License

(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

averaging for virtual array elements with fast completion of missing covariance matrix entries. First, redundant-data averaging is applied to construct the difference co-array. Missing elements are then filled through zero-initialization followed by Toeplitz matrix reconstruction, which restores the rank structure of the covariance matrix. An alternating projection iterative algorithm is subsequently developed to minimize the ratio of the nuclear norm to the Frobenius norm. By incorporating an adaptive threshold strategy and Toeplitz constraints, the algorithm efficiently completes the missing elements in the virtual array covariance matrix. Finally, a data fusion scheme is employed to obtain the localization results. Numerical simulations demonstrate that the proposed method reduces computational complexity while improving localization accuracy, particularly under low signal-to-noise ratios and limited observation data. The results indicate that the method effectively balances localization accuracy with real-time performance requirements.

Key words: Coprime array; Direct Position Determination (DPD); Redundant Data Averaging (RA); Covariance matrix completion; Convex optimization

1 引言

随着无线通信与智能感知技术的快速发展,运动单站无源定位系统^[1-3]凭借隐蔽性强、部署灵活等优势,在军事侦察、环境监测等领域极具应用价值。传统无源定位多采用两步定位方法^[4-6],其中波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计^[7-11]作为核心前置环节,是定位解算的关键基础,尤其在稀疏阵列应用层面,已形成针对性研究成果^[12-16]。但此类基于DOA的两步定位法,需先估计角度再解算位置,不可避免产生中间误差累积,难以满足高精度定位需求。为解决基于DOA估计两步定位法的固有缺陷,直接定位(Direct Position Determination, DPD)^[17-20]作为一种新兴定位范式应运而生。其摒弃传统两步定位法的中间参数估计环节,直接利用接收信号解算目标位置,有效抑制误差累积效应,成为当前的研究热点。

早期DPD研究多聚焦于均匀线阵、均匀圆阵等传统阵列结构,相关探索围绕提升估计精度、适配复杂信号场景、抑制系统误差等方向展开。其中,文献[21]率先提出基于特征空间的DPD方法,其估计精度逼近克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB),为后续高精度定位研究奠定了理论基础;文献[22]则针对间歇性辐射信号这一特殊场景,针对性提出无需预知信号个数的定位方案,填补了传统方法在动态信号处理中的空白;而幅相误差作为影响定位性能的关键系统干扰,文献[23,24]分别通过自校正策略、校正源辅助方案予以抑制,进一步完善了传统阵列DPD的工程适用性。近年来,挖掘信号波形固有特征以突破性能瓶颈成为DPD领域的重要研究方向。文献[25,26]分别借助非圆信号、恒模信号的独特统计特性,有效提升了定位精度;在此基础上,文献[27]深化非圆信号特性的应用,通过4阶累积量矩阵重构优化算法效率,

成功消除了孔径扩展过程中的冗余平移操作,兼顾了算法精度与效率;文献[28]则引入蛇优化算法解决非凸代价函数的全局寻优难题,大幅降低计算耗时,为该类方法的工程落地提供了新的设计思路;文献[29]更进一步,创新性融合极化信息构建位置-极化联合估计模型,显著提升了相邻辐射源的分辨能力,丰富了信号特征利用的维度。此外,稀疏表示技术也为DPD研究提供了新的突破路径。文献[30]提出基于迭代局部搜索的稀疏化DPD方法,有效破解了传统稀疏恢复算法在相邻辐射源场景下的分辨率瓶颈,为高密度目标定位提供了可行方案。

随着对定位性能要求的提升,稀疏阵列技术逐渐成为研究热点。嵌套阵列与互质阵列凭借阵列孔径扩展与自由度提升的独特优势,成为该领域的重要研究方向。嵌套阵列方面,文献[31]基于虚拟阵列模型并结合子空间数据融合(Subspace Data Fusion, SDF)算法,利用阵列结构扩展自由度,显著提升空间分辨能力;文献[32]提出扩展嵌套阵列,结合非圆信号特性与加权范数稀疏重构算法,抑制天线互耦效应,同步提高定位精度和自由度。互质阵列方面,文献[33]首次融合互质阵列与非圆信号实现DPD,提升了自由度与定位精度;文献[34]基于联合角度与多普勒信息的信号模型,经阵列协方差矩阵向量化重构,提升了多个非圆信号定位精度;文献[35]考虑辐射源信号衰减情况下,利用最大连续虚拟阵列(Maximum Continuous Virtual Array, MCVA)提高分辨率和自由度,却因舍弃非连续阵元造成信息损失;文献[36]提出基于原子范数最小化(Atomic Norm Minimization, ANM)的凸优化算法填充虚拟插值阵列协方差矩阵,并融合最小方差无失真响应(Minimum Variance Distortionless Response, MVDR)算法实现多目标定位,破解低信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)、短快拍数

景性能瓶颈；文献[37]则针对混合圆与非圆信号场景及网格失配问题，提出一种增强无网格DPD方法，通过酉变换降低计算复杂度并优化定位性能。上述研究推动了稀疏阵列在DPD中的应用，但虚拟阵元利用率、计算效率及动态场景适应性仍是待解问题。例如，移动虚拟插值阵列DPD方法多依赖ANM等凸优化算法，通过协方差矩阵补全提升定位性能，却存在双重不足：其一，冗余数据删除(Redundant-data Deletion, RD)未充分利用虚拟阵元冗余数据，浪费了原始数据天然降噪特性；其二，矩阵补全伴随高维凸优化，导致算法复杂度指数级增长，难以满足实时定位需求。

当前，无人机低空多目标侦察、车载电子对抗多辐射源定位、便携式移动监测站目标溯源等典型工程场景，普遍面临阵元数量受限、平台机动灵活、多目标欠定位的现实约束，且在低SNR、少观测数据条件下，传统DPD方法定位精度骤降，迫切需要融合多技术优势的高精度、低复杂度定位方案。基于此，本文以工程应用中低成本、高精度、实时性为核心目标，提出一种融合虚拟阵元冗余数据平均(Redundant-data Averaging, RA)与协方差矩阵缺失元素快速补全的移动虚拟插值阵列DPD方法，有机融合互质阵列运动单站、RA处理与“孔洞零插值-矩阵重构-迭代补全”填充策略，实现定位性能与计算效率的同步提升。主要创新点如下：一方面，提出高效低复杂度的协方差矩阵补全算法。基于核范数与Frobenius范数比值最小化(Nuclear-norm to Frobenius-norm Ratio Minimization, NFRM)原则，设计自适应阈值策略与Toeplitz约束的交替投影迭代算法(Alternating Projection Iterative Algorithm based on Adaptive Threshold Strategy and Toeplitz Constraint, APIA-ATSTC)，在低秩约束与Toeplitz结构约束之间实现最优平衡，高效补全虚拟插值阵列协方差矩阵，解决了传统ANM算法计算复杂度高的问题。另一方面，构建3层递进式DPD优化架构。整合“RA降噪-矩阵秩恢复-迭代优化补全”3层递进架构，实现定位精度与计算复杂度的协同优化，尤其在低SNR、少观测数据场景下的鲁棒性远超现有方法。数值仿真验证，本文方法较ANM类DPD方法大幅提升计算效率，较MCVA类传统DPD方法显著优化定位精度，且在极端观测条件下优势更突出，为运动单站无源定位提供了兼顾性能与实用性的新方案，有效调和了定位精度与运算复杂度的核心矛盾。

2 信号模型

如图1所示，考虑二维平面内存在 Q 个空间可分

辨且相互独立的辐射源以及一个移动观测平台的场景，辐射源发射中心波长为 λ 的窄带信号，其位置为 $\mathbf{p}_q = (x_q, y_q)^T$ ($q = 1, 2, \dots, Q$)，这里 $(\cdot)^T$ 表示矩阵或者向量的转置操作。该移动观测平台搭载扩展互质阵列，阵列结构如图2所示，子阵1和子阵2分别有 $2M$ 和 N 个阵元，阵元间距分别为 Nd 和 Md ， M 和 N 互质， d 为半波长，阵元总数 $J = 2M + N - 1$ 。以第1个阵元为参考，传感器位置集合为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \\ &= \{mNd, m \in (0, 2M - 1)\} \cup \{nMd, n \in (0, N - 1)\} \end{aligned} \quad (1)$$

假设观测平台低速运动，且在每个位置的观测时间足够短，满足严格的时间与相位同步约束。此时，辐射源信号携带的到达角度信息在批次间不同，同批次内角度信息近似相同，同时忽略多普勒频移。若运动过程中在 L 个不同位置采集数据，每个位置采集 K 个快拍，则平台第 l 个位置的第 k 个采样信号 $\mathbf{r}_l(k) \in \mathbb{C}^{J \times 1}$ 可表示为

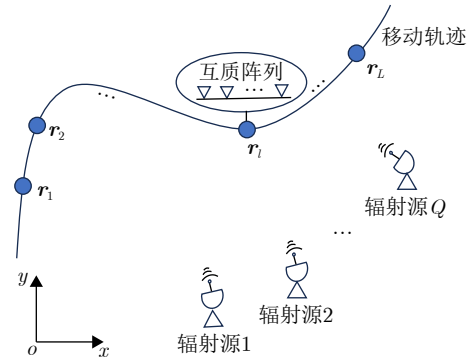


图1 基于互质阵列的移动单站直接定位示意图

Fig. 1 Schematic diagram of moving single-station direct localization based on coprime array

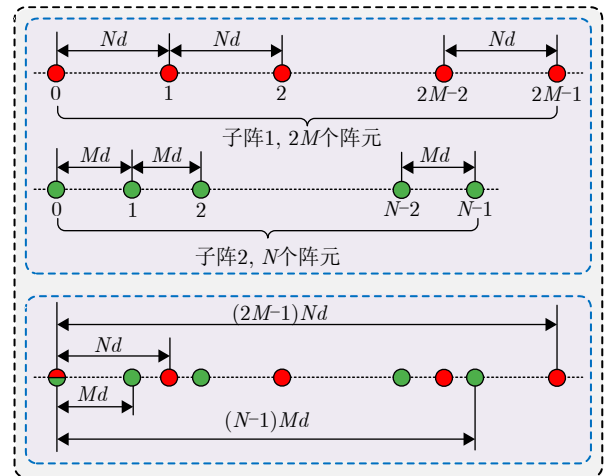


图2 扩展互质阵列结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of extended coprime array structure

$$\mathbf{r}_l(k) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q) s_{l,q}(k) + \mathbf{n}_l(k), k = 1, 2, \dots, K \quad (2)$$

其中, $s_{l,q}(k)$ 是平台第 l 个位置第 q 个辐射源的第 k 个采样信号, $\mathbf{n}_l(k) \in \mathbb{C}^{J \times 1}$ 是平台第 l 个位置天线阵列的噪声信号(假设为高斯白噪声且与发射信号独立), $\mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q)$ 是平台第 l 个位置第 q 个辐射源的阵列导向矢量, 其表达式为

$$\mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q) = [e^{-j2\pi \mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}_q) \mathbf{d}_1}, e^{-j2\pi \mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}_q) \mathbf{d}_2}, \dots, e^{-j2\pi \mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}_q) \mathbf{d}_J}]^T \quad (3)$$

这里, \mathbf{d}_j 是第 j 个阵元相对于参考阵元的位置矢量, $\mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}_q)$ 是第 q 个辐射源到天线的波数矢量, 其表达式为

$$\mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}_q) = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta \mathbf{r}_l(\mathbf{p}_q)}{\|\Delta \mathbf{r}_l(\mathbf{p}_q)\|_2} \quad (4)$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 表示 l_2 范数, $\Delta \mathbf{r}_l(\mathbf{p}_q) = \mathbf{r}_l - \mathbf{p}_q = (\Delta x_l(\mathbf{p}_q), \Delta y_l(\mathbf{p}_q))^T$ 是从第 q 个辐射源到天线的位置矢量。

将式(2)表示为矩阵形式:

$$\mathbf{r}_l(k) = \mathbf{A}_l(\mathbf{p}) \mathbf{s}_l(k) + \mathbf{n}_l(k) \in \mathbb{C}^{J \times 1} \quad (5)$$

其中, 阵列流形矩阵 $\mathbf{A}_l(\mathbf{p})$ 定义为

$$\mathbf{A}_l(\mathbf{p}) = [\mathbf{a}_l(\mathbf{p}_1), \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_2), \dots, \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_Q)] \in \mathbb{C}^{J \times Q} \quad (6)$$

注释: 时间与相位同步可通过北斗载波相位授时^[38]结合高精度恒温晶振实现纳秒级时间同步与微弧度级相位校准, 搭配轨迹辅助相位补偿^[39], 有效消除移动平台相位累积偏差, 满足移动阵列观测站严苛要求; 信号频率处理可采用数字锁相环稳频^[40]

及频率精确估计与补偿^[41]技术, 结合移动轨迹先验信息完成多普勒实时补偿, 搭配高精度频率源与射频链路校准, 抑制收发端频率偏差及信道畸变, 保障DPD频率域处理精度需求。若发射源非相参或信号不稳定, 仅会对阵列导向矢量引入局部随机相位扰动, 不会破坏阵列流形矩阵的秩结构与辐射源信号的空域稀疏性, 不改变信号模型的核心假设。

3 方法描述

图3展示了本文方法流程图, 主要有差分共阵构建、协方差矩阵重构、低秩矩阵补全和数据融合直接定位4部分。基于RA的差分共阵构建, 可突破物理阵元数量约束, 有效扩展系统自由度, 为后续多目标欠定定位提供高质量数据基础; 基于孔洞零插值的协方差矩阵重构, 针对性解决差分共阵固有孔洞缺陷, 通过矩阵规整填补空域数据空缺, 为后续补全环节提供具备Toeplitz基础结构的数据雏形; 基于APIA-ATSTC框架的低秩矩阵补全, 可精准修正矩阵残留误差, 恢复协方差矩阵真实秩属性, 进一步提升矩阵数据精度, 为DPD提供可靠、完整的阵列空域信息; 数据融合直接定位可融合多视角观测数据与完整阵列信息, 直接完成目标位置解算, 最终实现高精度目标定位。上述4部分构成紧密耦合的有机协同体系, 从阵列构建、数据修复、精度提升到最终定位形成完整技术闭环, 所有环节均协同服务于低硬件成本-高精度定位的核心工程目标, 保障了方法的高效性与工程实用性。

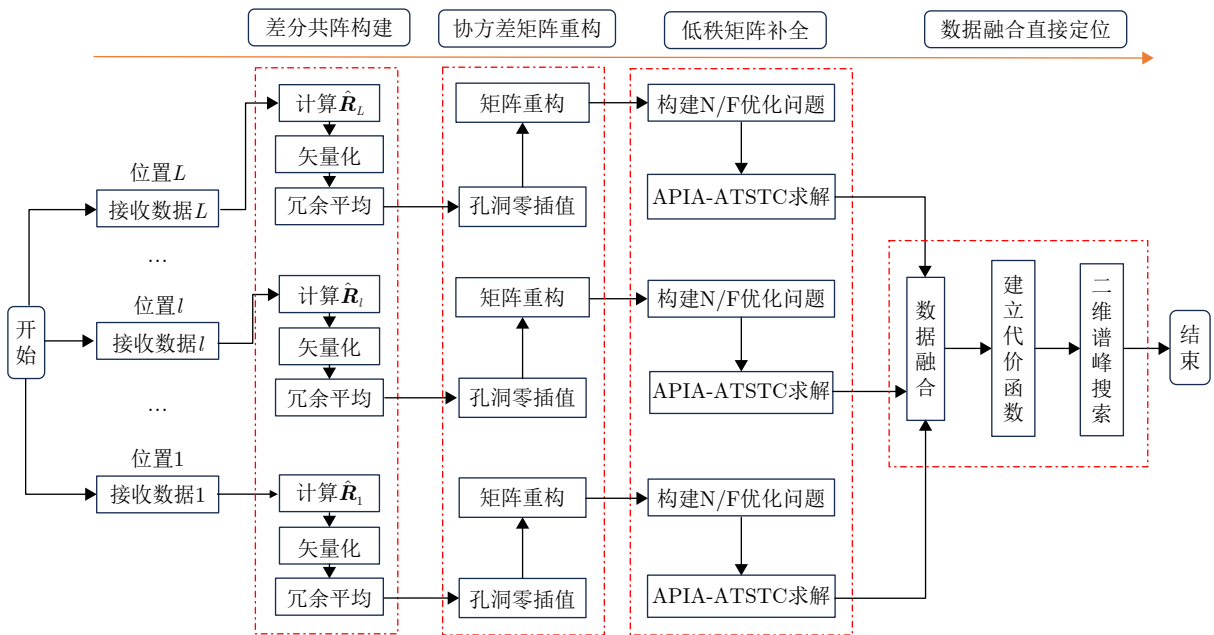


图3 所提方法流程图

Fig. 3 Flowchart of the proposed method

3.1 差分共阵构建

互质阵列通过构造差分共性阵列以扩展自由度，实现欠定条件下多个非相干辐射源的定位。文献[35–37]采用RD策略处理虚拟阵元数据，其核心是“筛选无冗余子集”以简化后续计算，但此过程会丢失冗余数据中蕴含的信号统计信息，存在噪声抑制能力弱的缺陷。本文引入RA方式替代RD策略，利用虚拟阵元冗余数据的“信号一致性、噪声随机性”特性，通过对同一虚拟位置的所有冗余数据进行统计平均处理，这样随机噪声会相互抵消，而一致性信号则会叠加增强，从而等效提高输入信噪比，为后续协方差矩阵补全提供高质量基础数据。具体流程如下。

首先，由式(3)计算第 l 个观测位置数据 $\mathbf{r}_l(k)$ 的协方差矩阵：

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{E}(\mathbf{r}_l(k)\mathbf{r}_l^H(k)) = \sum_{q=1}^Q \sigma_q^2 \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q)\mathbf{a}_l^H(\mathbf{p}_q) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_J \quad (7)$$

其中， $\mathbf{E}[\cdot]$ 表示求数学期望， $(\cdot)^H$ 表示矩阵的共轭转置操作， \mathbf{I}_J 表示 J 维单位矩阵。

接着，对 \mathbf{R}_l 进行矢量化得到：

$$\mathbf{z}_l = \text{vec}(\mathbf{R}_l) = (\mathbf{A}_l^* \odot \mathbf{A}_l)\boldsymbol{\rho} + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_J) = \mathbf{B}_l \boldsymbol{\rho} + \sigma_n^2 \mathbf{l}_e \quad (8)$$

其中， $\mathbf{B}_l = \mathbf{A}_l^* \odot \mathbf{A}_l = [\mathbf{b}_l(\mathbf{p}_1), \mathbf{b}_l(\mathbf{p}_2), \dots, \mathbf{b}_l(\mathbf{p}_Q)]$ ， $\mathbf{b}_l(\mathbf{p}_q) = \mathbf{a}_l^*(\mathbf{p}_q) \otimes \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q)$ ， $\mathbf{l}_e = [\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_J^T]^T$ ， $\boldsymbol{\rho} = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_Q^2]^T$ 。这里 $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵的向量化操作， $(\cdot)^*$ 表示矩阵的共轭操作， \odot 表示Khatri-Rao积， \otimes 表示Kronecker积。

可见， \mathbf{z}_l 可等效为虚拟阵列流形 \mathbf{B}_l 的输出，其位置集合 $S = \{\mathcal{L}(j_r) - \mathcal{L}(j_c) | j_r, j_c = 1, 2, \dots, J\}$ ，但其存在冗余元素且排列无序。对 \mathbf{z}_l 中数据元素进行RA处理，并按照虚拟阵元物理位置坐标进行升序排列，得到如下差分共阵：

$$\tilde{S} \subseteq \{\pm(Mn - Nm)d | m = 0, 1, \dots, 2M - 1, n = 0, 1, \dots, N - 1\} \quad (9)$$

这里将差分共阵 \tilde{S} 的等效接收数据记为 $\tilde{\mathbf{z}}_l$ ，其元素计算如下：

$$\tilde{\mathbf{z}}_l(\Delta \tilde{d}) = \frac{\sum_{j_r, j_c=1}^J \mathbf{R}_l(j_r, j_c) \delta(\Delta \tilde{d}, \mathcal{L}(j_r) - \mathcal{L}(j_c))}{\sum_{j_r, j_c=1}^J \delta(\Delta \tilde{d}, \mathcal{L}(j_r) - \mathcal{L}(j_c))}, \quad (10)$$

$$\Delta \tilde{d} = \mathcal{L}(j_r) - \mathcal{L}(j_c) \in \tilde{S}$$

其中， $\delta(\cdot)$ 表示Kronecker函数， $\mathbf{R}_l(j_r, j_c)$ 为矩阵 \mathbf{R}_l 第 j_r 行第 j_c 列的元素。

式(10)是实现冗余数据高效利用的核心，其计算逻辑可拆解为两步：首先通过 δ 函数筛选出对同一虚拟位置 $\Delta \tilde{d}$ 的所有冗余差分数据，再对这些数据进行等权值求和与归一化，最终得到该虚拟位置的等效接收数据。这一设计与传统RD方法形成本质区别：RD方法对重复虚拟位置的冗余差分数据采取硬删除策略，仅保留单一差分结果，直接丢失了冗余数据中蕴含的有效信号能量，导致虚拟阵元数据信噪比下降；而式(10)的等权值平均，完整保留了所有冗余数据的有效信号分量，通过归一化抑制了随机噪声的干扰，正是这种“冗余保留-等权聚合”的逻辑，解决了RD方法信号损失的核心缺陷，奠定了高精度的数据基础。

3.2 协方差矩阵重构

由式(9)易知，互质阵列的差分共阵 \tilde{S} 存在孔洞（非连续虚拟阵元位置），即不具备像均匀线阵的连续完备性。为使差分共阵 \tilde{S} 连续，一种方法是利用差分共阵的连续部分，如文献[35]提出的基于MCVA的DPD方法，这会大幅降低虚拟阵元利用率。另外一种方法是采用数据拟合方式填充孔洞，如文献[42]在固定多观测站场景下，提出的基于虚拟阵列孔洞插值(Virtual Array Hole Interpolation, VAHI)的DPD方法，其优势在于可快速填充孔洞数据，有效扩展虚拟阵列孔径，缺点是在存在连续孔洞时数据拟合效果较差。

为提高孔洞数据填充质量，可先使用零值填充孔洞形成一个满阵的虚拟均匀线阵 \bar{S} ，然后在Toeplitz矩阵重构基础上，依托凸优化算法修复协方差矩阵的缺失元素，从而进一步提升定位性能。零值填充孔洞是整个填充技术的基础环节，其核心作用为：填补差分共阵孔洞造成的协方差矩阵空域采样空缺，补齐矩阵维度、规整矩阵空域排布，使残缺的协方差矩阵具备Toeplitz重构的结构前提，同时初步恢复阵列流形的连续性，避免后续重构与补全过程中出现空域信息断裂，大幅降低低秩补全算法的求解复杂度，为后续实现矩阵秩恢复、孔径扩展奠定坚实基础。

经过零插值后的虚拟阵列信号 $\tilde{\mathbf{z}}$ 可表示为

$$[\tilde{\mathbf{z}}]_i = \begin{cases} [\tilde{\mathbf{z}}]_i, & i \in \tilde{S} \\ 0, & i \notin \tilde{S} \text{ 且 } i \in \bar{S}, \bar{S} = \min(\tilde{S}) : 1 : \max(\tilde{S}) \end{cases} \quad (11)$$

相应插值过程如图4所示。

不难发现，插值后信号 $\tilde{\mathbf{z}}_l$ 本质上等效于单快拍信号，基于此计算虚拟阵列协方差矩阵呈现单秩特性，导致其无法同时分辨多个辐射源。针对构建虚

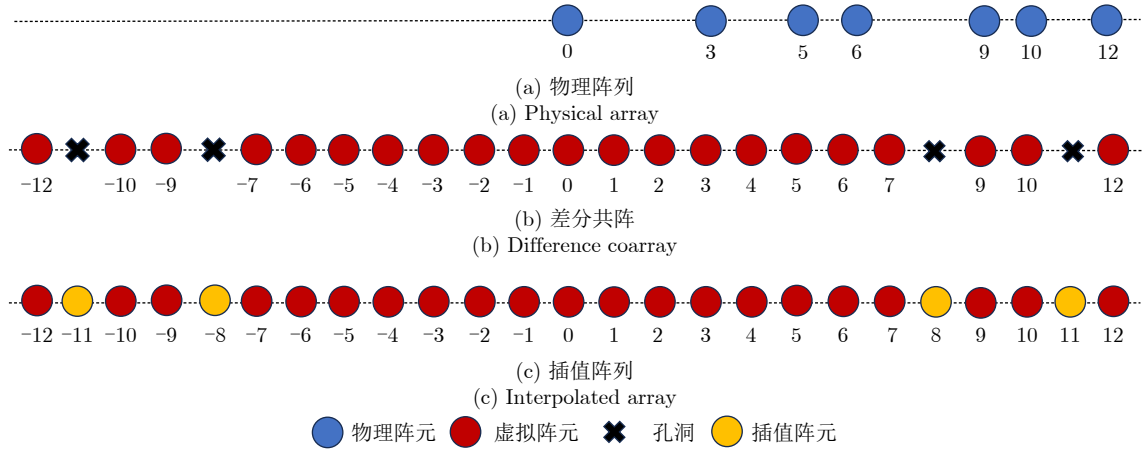


图4 虚拟阵列插值示意图

Fig. 4 Schematic diagram of virtual array interpolation

拟阵列导致的秩亏损问题, 利用阵列信号协方差矩阵的平移不变性, 构建Toeplitz矩阵进行重构是有效解决方案, 该方法在稀疏阵列DOA估计及协方差重构中已被证实有效性^[43-45]。构建如下形式的Toeplitz矩阵:

$$\mathbf{T}_l = \begin{bmatrix} [\bar{z}_l]_V & [\bar{z}_l]_{V-1} & \cdots & [\bar{z}_l]_1 \\ [\bar{z}_l]_{V+1} & [\bar{z}_l]_V & \cdots & [\bar{z}_l]_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\bar{z}_l]_{2V-1} & [\bar{z}_l]_{2V-2} & \cdots & [\bar{z}_l]_V \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中, $V = (|\mathcal{S}| + 1) / 2$ 。这里 $|\mathcal{S}|$ 表示集合 \mathcal{S} 的基数, $[\cdot]_i$ 表示向量的第 i 个元素。

由于 \bar{z}_l 是通过零插值得到的, \mathbf{T}_l 中存在零区域, 且关于对角线对称。接下来利用低秩矩阵补全算法恢复 \mathbf{T}_l 中的缺失元素。

3.3 低秩矩阵补全

虚拟阵列协方差矩阵的完整性与精度直接决定阵列流形的重构精度。若填充补全存在较大误差, 会导致协方差矩阵的空域信息失真、秩无法完全恢复, 进而使目标DPD代价函数出现伪峰值, 最终造成定位偏差增大、多目标分辨能力下降。文献[36]提出了基于ANM的凸优化算法用于虚拟插值阵列协方差矩阵补全, 其显著优势在于数据填充质量高, 能够精准恢复缺失元素, 但存在计算复杂度高的局限性, 难以满足实时性需求。为突破这一技术瓶颈, 实现虚拟插值阵列协方差矩阵的高效率补全, 本文采用迭代补全策略, 基于核范数与Frobenius范数比值最小化(NFRM)原则^[46,47], 创新性设计了基于自适应阈值策略及Toeplitz约束的交替投影迭代算法(APIA-ATSTC)框架, 通过逐步修正补全误差的方式, 降低协方差矩阵失真对定位算法的影

响, 实现填充补全精度与算法效率的协同提升。下面详细阐述具体实现方法。

根据秩松弛原理^[48], 低秩矩阵补全可建模为矩阵核范数最小化(Nuclear Norm Minimization, NNM)优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{T}}_l} & \left\| \hat{\mathbf{T}}_l \right\|_* \\ \text{s.t.} & \hat{\mathbf{T}}_l \circ \mathbf{G} = \mathbf{T}_l \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\|\cdot\|_*$ 表示核范数, 优化变量 $\hat{\mathbf{T}}_l$ 为补全后的矩阵。 \mathbf{G} 是一个二进制掩码矩阵, 与 \mathbf{T}_l 中零元素位置对应的元素为0, 其余元素为1。

虽然NNM问题易于处理, 但其对所有奇异值采用同等加权惩罚, 存在“大奇异值欠惩罚、小奇异值过度惩罚”的缺陷, 本质上仍由大奇异值决定, 很可能导致次优性能。相比之下, 核范数与Frobenius范数比值(N/F)^[46,47]的惩罚权重与奇异值大小负相关: 设矩阵奇异值为 γ_v , 则比值可表示为 $\sum_{v=1}^V \gamma_v / \sqrt{\sum_{v=1}^V \gamma_v^2}$, 大奇异值在分子中占主导, 小奇异值的影响被分母的平方和弱化, 从而实现自适应加权, 避免核范数的惩罚不均衡问题, 同时能更紧致地刻画矩阵的低秩特性。因此, 本文引入N/F来替代核范数, 以解决核范数对所有奇异值惩罚不均衡的问题。则式(13)可重新表述为

$$\min_{\hat{\mathbf{T}}_l} \eta \frac{\left\| \hat{\mathbf{T}}_l \right\|_*}{\left\| \hat{\mathbf{T}}_l \right\|_F} + \frac{1}{2} \left\| \hat{\mathbf{T}}_l \circ \mathbf{G} - \mathbf{T}_l \right\|_F^2 \quad (14)$$

其中, \circ 表示Hadamard积, $\|\cdot\|_F$ 表示Frobenius范数, η 为正则化参数。

针对式(14)所示的非凸优化问题, 尽管交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multi-

pliers, ADMM)^[49]可有效降低计算复杂度, 但在实际应用中存在显著缺陷——需人工调整参数以适配不同维度、噪声水平的数据矩阵, 导致算法泛化能力受限。为解决该问题, 同时充分利用协方差矩阵Toeplitz结构的先验信息, 本文设计了一种更为高效的APIA-ATSTC框架。该框架为启发式迭代算法, 深度融合虚拟阵列协方差矩阵的低秩特性与Toeplitz矩阵的对角线平移不变性, 创新性地引入自适应阈值策略, 通过交替投影在“低秩矩阵空间”与“Toeplitz 矩阵空间”之间循环迭代投影, 逐步逼近满足低秩与Toeplitz约束的稳定解, 其收敛行为将通过后续仿真实验验证。

相较于传统ADMM算法, APIA-ATSTC框架通过内置的迭代更新机制与收敛性判别准则, 可自动适配数据特征的动态变化, 无需人工干预即可在不同信噪比、样本数量场景下实现参数自适应调节。这种设计不仅显著提升了矩阵补全的效率与精度, 更在计算复杂度与定位性能之间实现了良好平衡, 为移动虚拟插值阵列的数据完整性处理提供了兼具鲁棒性与实时性的解决方案。该框架的具体实现流程如下。

(1) 参数设置与初始化

设置最大迭代次数 i_{\max} , 收敛阈值 ξ , 正则化参数 η , 初始化待补全矩阵 $\hat{\mathbf{T}}_l^{(0)} = \mathbf{T}_l$ 。

在实际应用中, i_{\max} 一般取值50~200次, 具体情况由虚拟阵列协方差矩阵维度和噪声水平决定。当矩阵维度较小时, i_{\max} 取50~100次即可收敛; 当矩阵维度增大或噪声较强时, 需适当增大至100~200次, 避免因迭代不充分导致补全误差增大; 若需优先保证实时性, 可将 i_{\max} 压缩至30~50次, 此时补全误差虽会增加, 但仍能满足定位精度需求。

收敛阈值 ξ 的取值遵循与矩阵Frobenius范数匹配的原则, 一般取值 $10^{-6} \sim 10^{-7}$ 可确保相邻迭代的矩阵相对误差 $< 0.01\%$, 既避免迭代过度, 又防止迭代提前停止。在兼顾精度和效率的前提下, ξ 推荐取值 10^{-6} , 此值在文献[47]和文献[49]中被验证为通用有效阈值。

正则化参数 η 的核心作用是平衡N/F比值项与数据拟合项的权重, 即起到控制低秩与Toeplitz约束的平衡作用, 采用自适应设置策略: $\eta = \alpha \cdot \|\mathbf{T}_l\|_F / \|\mathbf{G}\|_F$, 其中 α 为正则化参数计算系数, 一般取3~5可获得最优性能; 该设置在不同信噪比和缺失率场景下均能保证算法收敛性和补全精度, 无需人工调整, 提升了算法泛化能力。

(2) 迭代优化($i = 1$ 到 i_{\max})

步骤1 低秩近似

将当前矩阵投影至核范数最小化对应的闭凸包

空间, 通过奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)和奇异值阈值化, 逼近矩阵保持低秩特性, 捕获数据的潜在结构。在每次迭代中, 首先对当前矩阵 $\hat{\mathbf{T}}_l^{(i)}$ 做SVD:

$$\hat{\mathbf{T}}_l^{(i)} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (15)$$

然后, 计算核范数与Frobenius范数, 确定自适应阈值 τ :

$$\tau = \eta \frac{\|\hat{\mathbf{T}}_l^{(i)}\|_*}{\|\hat{\mathbf{T}}_l^{(i)}\|_F} \quad (16)$$

自适应阈值 τ 的核心目的是动态筛选有效奇异值, 平衡矩阵低秩性与数据完整性。N/F反映了矩阵奇异值的稀疏度分布特性, 阈值 τ 随该比值动态调整, 当矩阵低秩性较强时, 能量集中于少数大奇异值, N/F比值更小, 阈值 τ 随之减小, 从而在后续迭代中保留更多奇异值; 当矩阵低秩性较弱时, 能量分散于更多小奇异值, N/F比值更大, 阈值 τ 随之增大, 从而保留少量关键奇异值确保补全矩阵既满足低秩约束, 又能准确恢复缺失元素。可见, 通过动态调整阈值 τ 以适应不同数据特性, 实现奇异值的差异化处理。

接着, 对奇异值矩阵 \mathbf{S} 阈值化处理:

$$\mathbf{S}_\tau = \text{diag}(\max(\text{diag}(\mathbf{S}) - \tau, 0)) \quad (17)$$

最后, 重构低秩近似矩阵:

$$\hat{\mathbf{T}}_{l_r}^{(i)} = \mathbf{U} \mathbf{S}_\tau \mathbf{V}^T \quad (18)$$

步骤2 约束修正

将低秩近似矩阵投影至Toeplitz矩阵空间, 利用Toeplitz矩阵对角线元素的平移不变性, 对低秩近似矩阵 $\hat{\mathbf{T}}_{l_r}^{(i)}$ 进行修正, 进一步约束解空间, 提高补全精度。该投影步骤的选取依据源于阵列协方差矩阵的固有结构先验: 均匀线阵的协方差矩阵天然具有Toeplitz结构, 因此待恢复的真实协方差矩阵必然属于Toeplitz矩阵空间; Toeplitz矩阵空间是满足加法与数乘封闭的线性子空间, 其闭凸性为迭代稳定性提供了基础, 且Toeplitz投影算子为非扩张算子, 可保证迭代过程的单调性, 从而避免无约束优化导致的结构失真, 提升低秩恢复的精度与效率。

具体方法是遍历矩阵各对角线(范围 $-(V-1)$: $(V-1)$), 计算每条对角线元素均值, 并将均值赋给该对角线对应位置, 得到修正矩阵 $\hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i)}$, 公式为

$$\hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i)}(i_r, i_c) = \text{mean} \left(\text{diag} \left(\hat{\mathbf{T}}_{l_r}^{(i)}, i_c - i_r \right) \right) \quad (19)$$

其中, $\text{mean}(\cdot)$ 表示求平均操作, $\text{diag}(\cdot)$ 表示提取矩阵的主对角线元素或由向量创建对角矩阵。 $\text{diag}(\mathbf{M}, i)$ 表示矩阵 \mathbf{M} 的第 i 条对角线。

步骤3 融合更新

融合原始矩阵已知元素与修正矩阵, 更新待补全矩阵:

$$\hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i)} \circ (\mathbf{1} - \mathbf{G}) + \mathbf{T}_l \circ \mathbf{G} \quad (20)$$

(3) 收敛判断

当且仅当相邻两次迭代的补全矩阵的相对误差小于收敛阈值 ξ 时, 即

$$\frac{\left\| \hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i)} \right\|_F}{\left\| \hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i)} \right\|_F} \leq \xi \quad (21)$$

迭代收敛, 此时终止并输出 $\hat{\mathbf{T}}_l$ 。

注释: 与传感器故障、数据传输丢失导致的协方差矩阵元素大量缺少情况不一样, 差分共阵的缺失本质上是少量结构性单个或连续孔洞, 缺失元素占比少, 且集中在特定区域, 其影响是破坏虚拟阵列连续性而非缺失数量多; 本文所提方法精准匹配移动互质阵列DPD场景, 能够高质量修复少量孔洞, 且算法可快速收敛, 满足实时定位需求。

3.4 数据融合直接定位

获得 $\hat{\mathbf{T}}_l$ 后, 可使用SDF算法解决定位问题。基于SDF算法的代价函数可表示为

$$f_{\text{SDF}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sum_{l=1}^L \bar{\mathbf{b}}_l^H(\mathbf{p}) \mathbf{E}_l(\mathbf{E}_l)^H \bar{\mathbf{b}}_l(\mathbf{p})} \quad (22)$$

其中, \mathbf{E}_l 表示第 l 个批次经APIA-ATSTC框架恢复的矩阵 $\hat{\mathbf{T}}_l$ 的噪声子空间; \mathbf{p} 代表辐射源在待定位区域(可行解空间)中的一个候选位置坐标向量, $\bar{\mathbf{b}}_l(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{V \times 1}$ 表示对应于第 l 个批次虚拟均匀线阵在位置 \mathbf{p} 处的导向矢量, 其表达式为

$$\bar{\mathbf{b}}_l(\mathbf{p}) \triangleq \left[e^{-j2\pi \mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}) \mathbf{d}_1}, e^{-j2\pi \mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}) \mathbf{d}_2}, \dots, e^{-j2\pi \mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}) \mathbf{d}_v}, \dots, e^{-j2\pi \mathbf{u}_l^T(\mathbf{p}) \mathbf{d}_V} \right]^T \quad (23)$$

上述代价函数谱峰的二维坐标就是辐射源位置估计 $\hat{\mathbf{p}}$ 。这里需要说明的是, 在实际中受有限快拍数的限制无法获得式(7)所示的精确协方差矩阵 \mathbf{R}_l , 使用其无偏估计:

$$\hat{\mathbf{R}}_l = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{r}_l(k) \mathbf{r}_l^H(k) \quad (24)$$

4 方法分析

本文方法构建了分步优化的技术流程, 依次通过RA处理、零插值与Toeplitz重构、APIA-ATSTC框架补全, 逐步实现定位性能提升。其中, RA处理作为数据降噪层, 通过对同一虚拟位置的所有冗

余数据进行统计平均处理, 为后续优化提供低噪声、高分辨的空域基础数据, 避免进一步导致后续优化偏差; 零插值与Toeplitz重构作为矩阵秩恢复层, 通过零插值填充空域数据空缺, 同时强制矩阵满足阵列信号协方差矩阵固有的Toeplitz结构, 解决了空域信息断裂问题, 为协方差矩阵补全提供结构规整、秩属性可信的数据雏形; APIA-ATSTC框架补全作为迭代优化层, 依托APIA的精度优化能力与ATSTC的秩属性校准能力, 精准剔除插值残留噪声, 补全矩阵缺失信息并锁定真实秩, 大幅提升协方差矩阵精度与完整性, 为最终定位提供高质量数据支撑。各环节协同服务于低复杂度-高精度定位的核心工程目标, 从根本上解决了传统算法数据浪费与优化低效的问题。此外, 对于非相参/不稳定的非理想辐射源, 本文方法具备一定鲁棒性, RA降噪可对发射源不稳定引入的随机相位/幅度扰动进行滤波平滑, 矩阵秩恢复可基于阵列流形的固有结构修复扰动导致的局部秩亏, 迭代优化补全则通过多批次观测数据的联合估计, 抵消随机误差的累积效应, 可对该类扰动实现初步抑制。

4.1 方法步骤

基于以上讨论和分析, 现将本文所提方法详细步骤总结如下:

- (1) 根据式(24)计算观测数据协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_l$, 并进行向量化操作得到 \mathbf{z}_l 。
- (2) 根据式(10)计算虚拟差分共阵 $\tilde{\mathbf{S}}$ 的等效接收数据 $\tilde{\mathbf{z}}_l$ 。
- (3) 利用式(11)对虚拟差分共阵信号 $\tilde{\mathbf{z}}_l$ 进行零插值, 得到插值信号 $\tilde{\mathbf{z}}_l$ 。
- (4) 按照式(12)对 $\tilde{\mathbf{z}}_l$ 进行Toeplitz矩阵重构, 得到 \mathbf{T}_l 。
- (5) 基于式(14)构建N/F优化问题, 依托APIA-ATSTC框架, 利用式(15)~式(21)更新 τ , \mathbf{S}_τ , $\hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i)}$, $\hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i)}$ 和 $\hat{\mathbf{T}}_{l_t}^{(i+1)}$, 直至满足式(21)的迭代收敛条件, 得到最优补全矩阵 $\hat{\mathbf{T}}_l$ 。
- (6) 将定位范围划分为 N^p 个网格, 按照式(22)计算DPD代价函数谱。
- (7) 寻找式(22)中 Q 个谱峰对应的坐标, 即 Q 个辐射源位置的估计值 $\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \dots, \hat{\mathbf{p}}_q, \dots, \hat{\mathbf{p}}_Q$ 。

4.2 方法复杂度

本文所提方法主要包括协方差矩阵计算、依托APIA-ATSTC框架的凸优化问题求解、矩阵分解和代价函数计算。由于基于RA处理的差分共阵构造、孔洞零值填充与Toeplitz矩阵重构仅与阵元数有关, 与快拍数 K 无关, 对整体运算复杂度的影响

较小，在此忽略。协方差矩阵计算涉及所有观测批次信号的共轭乘法，乘法运算复杂度为 $O(LKJ^2)$ ；依托APIA-ATSTC框架的矩阵补充，主要运算在SVD矩阵分解，乘法运算复杂度为 $O(V^3)$ ，若迭代 I 次，则协方差矩阵补充的乘法运算复杂度为 $O(LIV^3)$ ；对于补充后协方差矩阵分解，乘法运算复杂度为 $O(LV^3)$ ；对于代价函数计算，当采用高效计算方式，每个网格点的计算复杂度为 LV^2 ，若网格点数为 N^p ，则二维搜索的总乘法运算复杂度为 $O(N^pLV^2)$ 。综上，本文所提方法的乘法运算复杂度为 $O(LKJ^2 + LIV^3 + LV^3 + N^pLV^2)$ 。

为进一步比较，表1列出了另外2种DPD方法的乘法运算复杂度。对比方法为文献[25]基于MCVA的DPD方法与文献[26]基于ANM的DPD方法。其中， D 表示ANM-DPD方法基于CVX求解器的迭代次数， \bar{V} 为MCVA-DPD方法的子阵维度。经对比，各方法复杂度排序如下：ANM>本文>MCVA(迭代次数 $I \ll D$)。

5 数值仿真

本节通过数值仿真验证所提方法的定位性能。实验设置如下：采用如图4所示的扩展互质阵列(总阵元数 $J = 2M + N - 1 = 9$)，对应物理阵元位置为 $0, 3d, 4d, 6d, 8d, 9d, 12d, 16d, 20d$ ， d 取信号半波长。辐射源为远场窄带信号，载波频率 $f_c = 3$ GHz。对比方法同表1，ANM-DPD方法的凸优化问题通

过CVX求解器实现，本文所提方法依托APIA-ATSTC框架求解。除非特别说明，实验信号为BPSK调制信号。

5.1 分辨率对比实验

本节通过对比相邻辐射源的代价函数谱以比较各DPD方法的分辨率。如图5所示，考虑二维平面内一搭载扩展互质阵列的观测站沿 $X=30$ km的纵轴移动，观测批次 $L=4$ ，观测位置分别为 $[0,0]$ ， $[0,10]$ ， $[0,20]$ ， $[0,30]$ km。辐射源数量 $Q=2$ ，位置坐标分别为 $[15,14.5]$ 和 $[15,15.5]$ km。本实验中，二维搜索区域为 $(10$ km, 20 km) \times $(10$ km, 20 km)，搜索步长 0.02 km(即 501×501 个网格点)。3种条件下(信噪比SNR=0 dB、快拍数 $K=30$ ；信噪比SNR=-3 dB、快拍数 $K=10$ ；信噪比SNR=-5 dB、快拍数 $K=5$)的仿真结果分别如图6、图7和图8所示。

仿真结果表明：(1)在信噪比与观测数据量(SNR=0 dB, $K=30$)较好的条件下，各DPD方法均能分辨相邻辐射源，但MCVA-DPD方法因舍弃非连续虚拟阵元数据，虚拟阵列孔径小于其他DPD

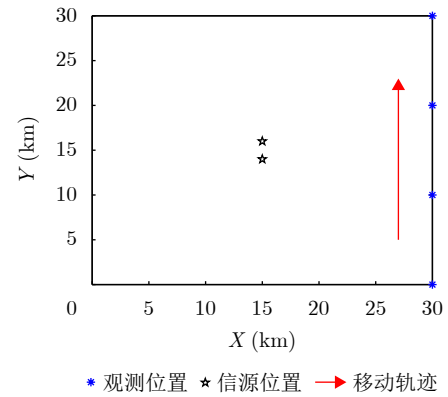


图5 两相邻目标定位场景示意图

Fig. 5 Schematic diagram of localization scenario for two adjacent targets

方法	运算复杂度
MCVA	$O(LKJ^2 + LV^3 + N^pLV^2)$
ANM	$O(LKJ^2 + LD((V+1)^3 + (V+1)^2 + 1) + LV^3 + N^pLV^2)$
本文	$O(LKJ^2 + LIV^3 + LV^3 + N^pLV^2)$

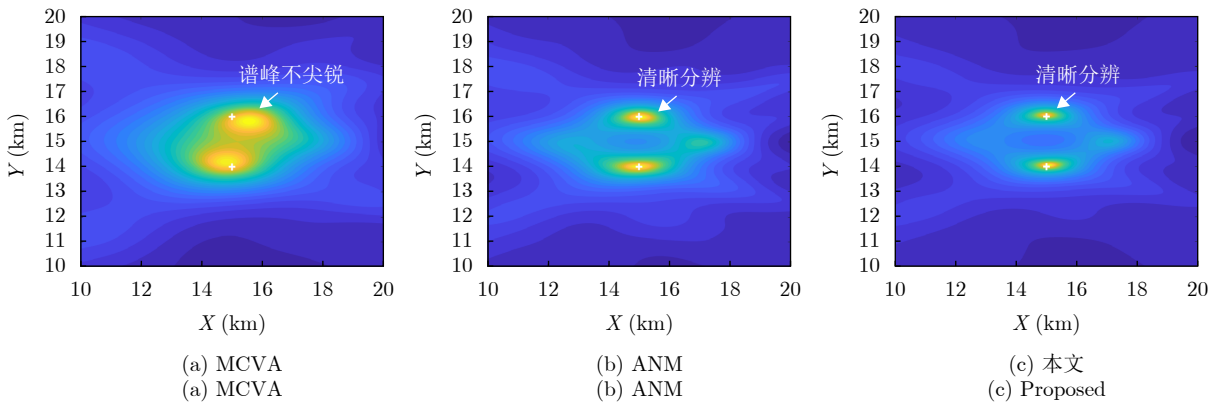


图6 各DPD方法代价函数谱(SNR=0 dB, $K=30$ 条件下)

Fig. 6 Cost function spectra of DPD methods (under conditions of SNR=0 dB and $K=30$)

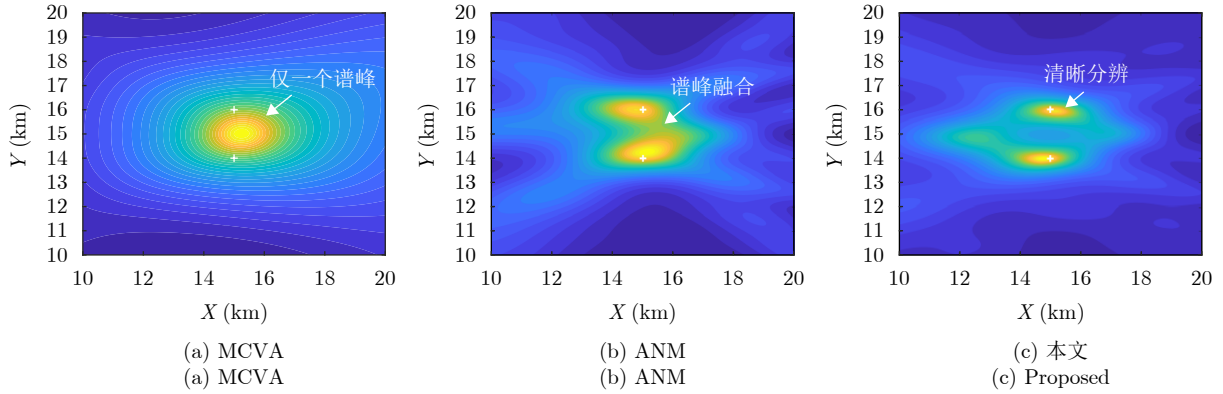


图7 各DPD方法代价函数谱(SNR=-3 dB, K=10条件下)

Fig. 7 Cost function spectra of DPD methods (under conditions of SNR=-3 dB and K=10)

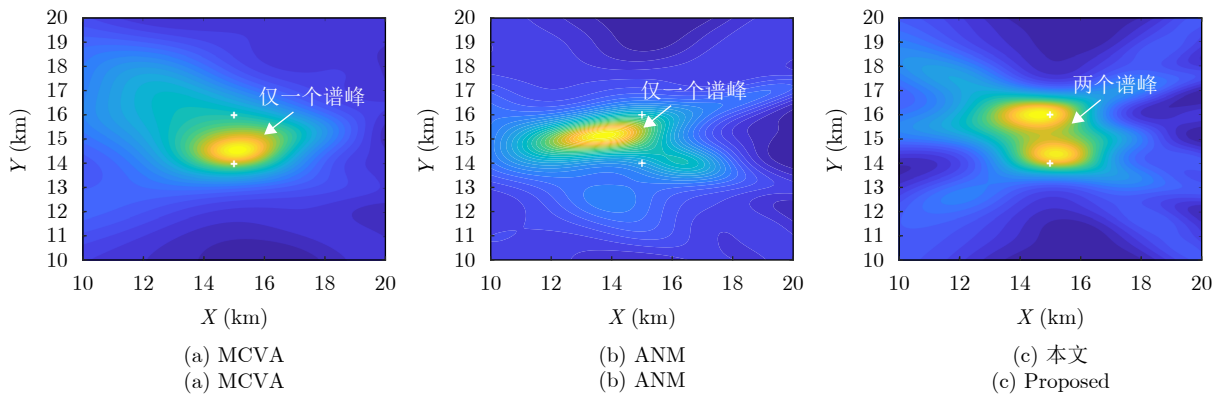


图8 各DPD方法代价函数谱(SNR=-5 dB, K=5条件下)

Fig. 8 Cost function spectra of DPD methods (under conditions of SNR=-5 dB and K=5)

方法,存在谱峰不尖锐、分辨率较低的问题;(2)在中等信噪比和观测数据量(SNR=-3 dB, K=10)的条件下,MCVA-DPD方法已不能有效分辨相邻辐射源,ANM-DPD方法虽能分辨,却出现谱峰融合现象,而本文所提方法相邻谱峰边界依然清晰可辨;(3)随着信噪比和观测数据量(SNR=-5 dB, K=5)的进一步降低,除本文所提方法外,其他方法仅呈现单个谱峰,无法正常分辨两个目标。可见本文所提方法分辨率最优,原因在于:一方面对虚拟阵元冗余数据取平均,等效提高了信噪比,为低秩矩阵补全提供了更加良好的基础数据;另一方面采用自适应阈值策略和Toeplitz结构约束驱动的迭代补全算法,显著提升补全精度,尤其在低信噪比和少快拍数等噪声不确定场景中的鲁棒性更强。

为进一步定量评估各DPD方法的分辨率性能,本文引入成功分辨概率(Probability of Successful Discrimination, PSD)指标。设定两个临近非相干辐射源位置分别为 $[15, 15 - \bar{d}]$ km和 $[15, 15 + \bar{d}]$ km(间隔 $\Delta d = 2\bar{d}$ km),若满足以下条件,则认为两个辐射源信号被成功分辨:

$$\|\hat{\mathbf{p}}_q - \mathbf{p}_q\|_2 \leq 0.5\bar{d}, q = 1, 2 \quad (25)$$

即两个辐射源的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)均不大于 $0.5\bar{d}$,可被认定为成功分辨。

为进一步简化,本文设定当两个辐射源的平均RMSE不大于 $0.5\bar{d}$ 时,认定为成功分辨。平均RMSE计算公式为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{QN_m} \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{x}_q^i - \mathbf{x}_q\|_2^2} \quad (26)$$

其中,辐射源数量 $Q = 2$, N_m 表示蒙特卡罗试验次数, \mathbf{x}_q^i 为第 q 个辐射源第 i 次估计得到的位置坐标, \mathbf{x}_q 为第 q 个辐射源的真实位置坐标。

那么成功分辨概率 P_s 计算公式为

$$P_s = \frac{N_s}{N_m} \times 100\% \quad (27)$$

其中, N_s 表示成功分辨的次数。

实验条件为 $\bar{d} = 1$ km,蒙特卡罗试验次数 $N_m = 100$,观测条件保持不变,二维搜索区域为 $(13 \text{ km}, 17 \text{ km}) \times (13 \text{ km}, 17 \text{ km})$,搜索步长 0.02 km(即 201×201 个节点)。图9(a)展示了快拍数 $K=30$ 条

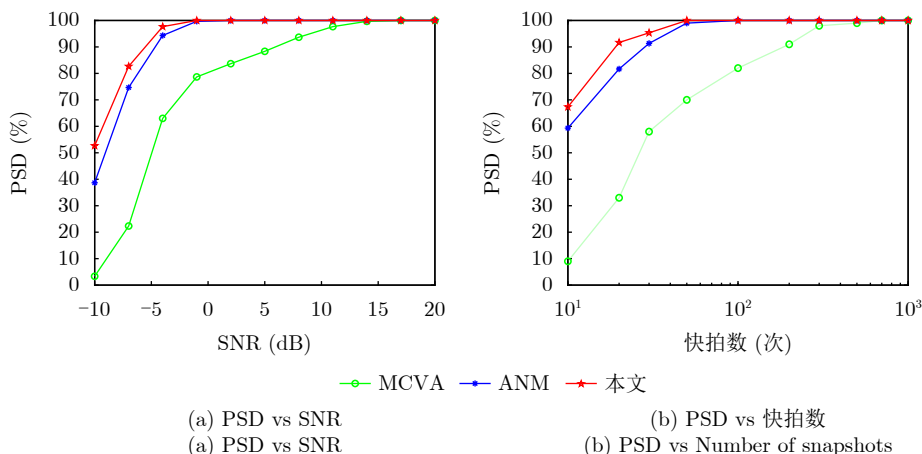


图 9 各DPD方法的PSD

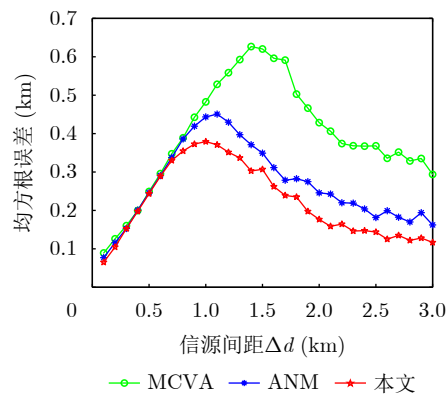
Fig. 9 The PSD of various DPD methods

件下各DPD方法PSD随SNR的变化情况，SNR变化区间为 $-10\sim 20$ dB，间隔3 dB。

从图中可以看出，当 $\text{SNR} < 2$ dB时，本文所提方法分辨率优于其他DPD方法，并且当 $\text{SNR} = -1$ dB时，其PSD达到100%；相比之下，ANM-DPD方法在 $\text{SNR} = 2$ dB时，PSD达到1，而MCVA-DPD方法在 $\text{SNR} = 17$ dB时才能达到100%。图9(b)展示了 $\text{SNR} = -5$ dB条件下各DPD方法PSD随快拍数的变化情况，快拍数取值区间为 $[10\ 20\ 30\ 50\ 100\ 200\ 300\ 500\ 700\ 1000]$ 。从图中可以看出，当快拍数 $K < 100$ 时，本文所提方法分辨率优于其他DPD方法，并且当 $K = 50$ 时PSD达到100%；相比之下，ANM-DPD方法在快拍数 $K = 100$ 时，PSD达到100%，而MCVA-DPD方法在 $K = 700$ 时才能达到100%。综上所述，本文所提方法具有最优分辨率，该仿真结果同上述定性分析结论一致。

为更直观地量化各DPD方法的分辨率门限，这里调整相邻辐射源间距 Δd ，增加定位RMSE随不同信源间距 Δd 变化关系的仿真实验。本实验中 Δd 的取值区间为 $[0.1, 3.0]$ km，间隔0.1 km， $\text{SNR} = -3$ dB，快拍数为30次，其他实验条件保持不变，对应结果如图10所示，清晰展示了各DPD方法的定位误差随 Δd 的变化趋势。

从图10可以观察到，随着两个辐射源间距的增大，各DPD方法的RMSE呈现“先上升、后下降”的变化趋势，这一现象的内在机理与阵列空间分辨能力的约束直接相关：(1)当两个辐射源间距较小时，受限于阵列分辨能力，所有方法均无法将两个辐射源有效区分，此时定位谱图中仅在两个辐射源的几何中心位置形成单一谱峰，估计位置始终集中在该中心处。随着辐射源间距的增大，“辐射源真

图 10 RMSE与 Δd 关系图Fig. 10 Relationship diagram between RMSE and Δd

实位置与几何中心的距离”逐渐增加，因此RMSE会随间距的增大而持续上升。(2)当间距增大至某一临界值(即分辨率门限，图中“拐点”对应的间距)后，定位谱图中开始分离出两个独立的谱峰，且谱峰位置逐渐贴近两个辐射源的真实位置；此时随着间距的进一步增大，估计位置与真实位置的偏差持续减小，RMSE逐渐下降并趋于稳定。不难发现，各DPD方法分辨率门限高低依次排序如下： $\text{MCVA} > \text{ANM} > \text{本文}$ 。可见，在同等条件下，本文所提DPD方法具有最低的分辨率门限，率先将相邻辐射源区分开，进一步支撑了所提方法具有更优分辨率的结论。

5.2 定位精度对比实验

本节分析各DPD方法的定位精度，在不同条件下分别绘制各方法定位RMSE随SNR、快拍数和观测批次的变化情况，并与CRLB对比，对于基于互质阵列的单个运动观测站DPD场景，其CRLB在文献[36]中已有详细推导，具体表达式如下：

$$\text{CRLB}(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{K} (\mathbf{G}^H \mathbf{\Pi}_\Delta \mathbf{G})^{-1} \quad (28)$$

其中,

$$\mathbf{G} = (\mathcal{R}^T \otimes \mathcal{R})^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_Q} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y_Q} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{\Pi}_\Delta = \mathbf{I} - \Delta(\Delta^H \Delta)^{-1} \Delta^H \quad (30)$$

$$\Delta = (\mathcal{R}^T \otimes \mathcal{R})^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \sigma_1^2} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \sigma_2^2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \sigma_Q^2} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \sigma_n^2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathcal{R}) \quad (32)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{R}_L \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{LJ \times LJ} \quad (33)$$

此外, 单目标场景下, 辐射源位置设置为[15, 15] km, 二维搜索区域为(10 km, 20 km)×(10 km, 20 km), 搜索步长0.02 km(即501×501个节点); 多目标场景下, 辐射源位置设置为[15, 10] km, [15, 15] km和[15, 20] km, 二维搜索区域为(5 km, 25 km)×(5 km, 25 km), 搜索步长0.1 km(即201×201个节点)。本实验中, 观测站移动轨迹不变, 观测位置在0~30 km内均匀分布, 蒙特卡罗仿真实验次数为100。

5.2.1 不同信噪比条件下的RMSE

本次仿真实验条件设置如下: 观测批次 $L=4$, 观测位置分别为[30, 0] km, [30, 10] km, [30, 20] km和[30, 30] km, SNR范围-10~10 dB, 间隔5 dB, 图11展示了快拍数为30时各DPD方法RMSE随SNR的变化情况。仿真结果表明: MCVA-DPD方法定位精度最低, 尤其是在低信噪比(SNR=-10 dB)时, 与其他方法的精度差距超过0.1 km以上, 主要

是其丢弃差分共阵的非连续部分导致精度下降; 而本文所提方法始终具有最小的定位误差, 可见其在稳定性上比其他方法更优异, 一方面是其利用RA处理构造虚拟阵列等效接收信号, 为协方差矩阵补全提供了更稳定的数据, 另一方面是其依托所提APIA-ATSTC框架补全协方差矩阵, 降低了凸优化算法对噪声的敏感性。

5.2.2 不同快拍数条件下的RMSE

本次仿真实验条件设置如下: 观测批次 $L=4$, 观测位置分别为[30, 0] km, [30, 10, 30, 20] km和[30, 30] km, 快拍数 K 取10, 20, 30, 50, 100。图12展示了SNR=-5 dB时各DPD方法RMSE随快拍数的变化情况。仿真结果表明: 在不同快拍数下, MCVA-DPD方法性能最差, 与其他方法相比存在数十米的固定差距, 这是因其虚拟阵列孔径小导致的; 随着快拍数增加, 各DPD方法性能趋于稳定, 而本文所提方法始终具有更低的定位误差, 可见RA处理结合APIA-ATSTC矩阵补全框架降低了噪声的不良影响, 从而提升了定位性能。

5.2.3 不观测批次条件下的RMSE

本次仿真实验条件设置如下: 快拍数 $K=20$, 观测批次 L 取4, 5, 7, 11, 16。图13展示了SNR为-5 dB时各DPD方法的RMSE随观测批次的变化情况。观测批次的增加, 主要对定位性能的提升产生两个方面的积极影响, 一是观测数据量的提升, 相当于增加了快拍数; 二是增加了不同位置的观测, 相当于提供了更多的角度信息。仿真结果表明: 在不同观测批次下, 本文所提方法始终保持最小的定位误差, MCVA-DPD方法始终保持最大的定位误差, ANM-DPD方法定位误差居中。原因分析同上, 这里不再赘述。

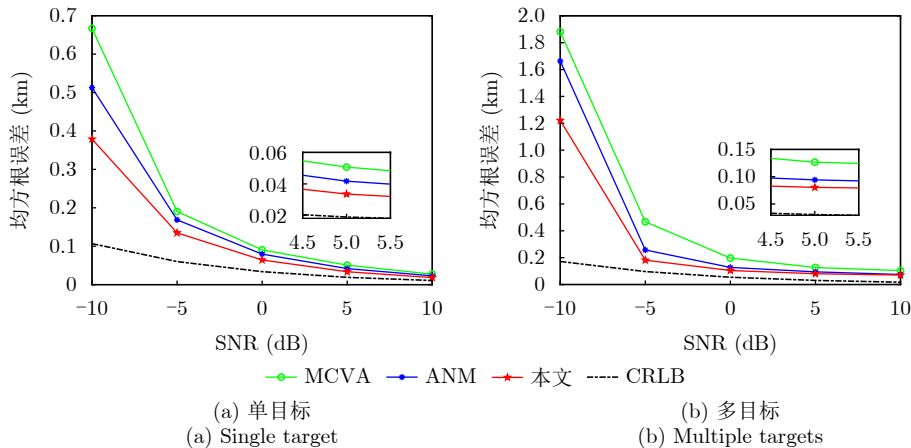


图 11 定位RMSE随SNR的变化情况

Fig. 11 Variation of localization RMSE with SNR

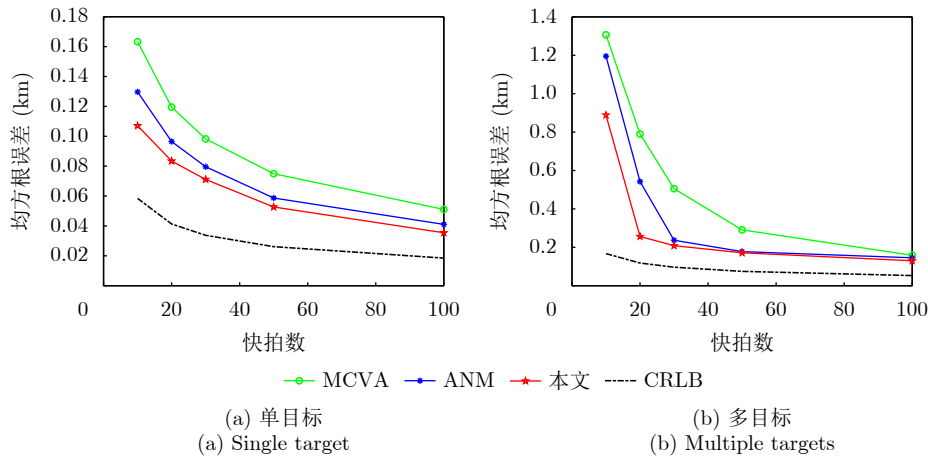


图 12 定位RMSE随快拍数的变化情况

Fig. 12 Variation of localization RMSE with the number of snapshots

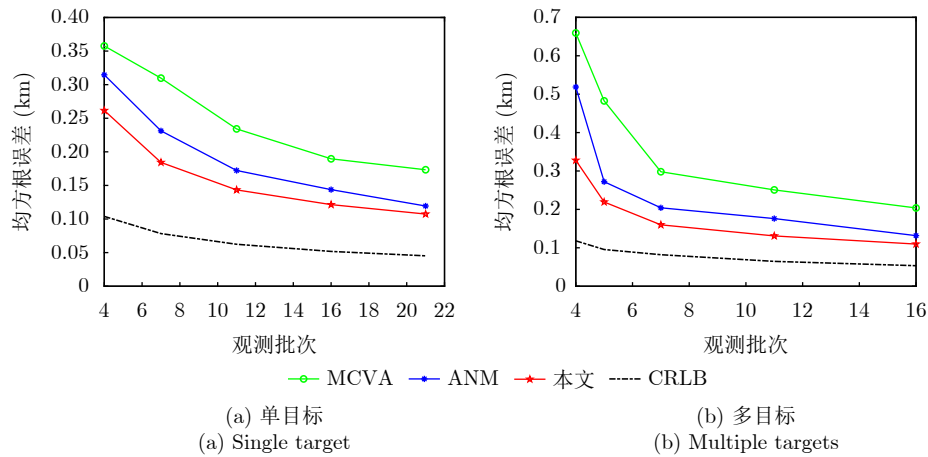


图 13 定位RMSE随观测批次的变化情况

Fig. 13 Variation of localization RMSE with observation batches

5.3 自由度(Degree Of Freedom, DOF)对比实验

本节通过对代价函数谱中可分辨辐射源数量来比较各DPD方法的DOF。在高SNR和大数据量的情况下，噪声对代价函数谱的影响较小，各DPD方法的DOF与虚拟阵列孔径相关，孔径越大，DOF越高。对于如图4所示的扩展互质阵列，其虚拟差分共阵最大连续部分为 $-14d$ 至 $14d$ ，经孔洞插值填补 $\pm 15d$ ， $\pm 18d$ 和 $\pm 19d$ 位置处的6个孔洞后，可形成 $-20d$ 至 $20d$ 的等效均匀线阵。那么MCVA-DPD方法经Toeplitz平滑后可形成维度为 15×15 的矩阵，而其他DPD方法可形成维度为 21×21 的矩阵，可见，除MCVA-DPD方法DOF为14外，其他方法DOF都为20。

为验证上述理论分析，设定如图14所示仿真场景。观测站沿 $Y=X$ 的直线运动，观测位置在 $[0,0]$ 至 $[30,30]$ km内均匀分布，观测批次 $L=61$ ，当存在14个辐射源时，其位置坐标如图14(a)所示，当

存在20个辐射源时，其位置坐标如图14(b)所示，信噪比 $SNR=25$ dB，快拍数 $K=300$ ，二维搜索区域为 $(0 \text{ km}, 30 \text{ km}) \times (0 \text{ km}, 30 \text{ km})$ ，搜索步长 0.1 km （即 301×301 个节点）。图15和图16分别展示了二维平面存在14个或20个辐射源时的各DPD方法代价函数谱的热力图，需要说明的是，当辐射源超过14个时，MCVA-DPD方法因虚拟阵列协方差矩阵维度低而无法分离噪声子空间，此时SDF算法失效。

从仿真结果可知：(1)除MCVA-DPD方法以外的其他DPD方法均能有效分辨20个辐射源，主要原因是其采用低秩矩阵补全方法，恢复了虚拟阵列非连续部分，具有同等维度的虚拟阵列协方差矩阵，因此具有同等的DOF；(2)当辐射源数量增多时，各DPD方法代价函数谱存在谱峰展宽和拖影现象，甚至有许多假峰。这主要是因为较单一的移动轨迹和多目标数量损害了观测的完整性，导致在视线向量的交点处出现虚假估计峰，或在不同方向形成遮挡；(3)仿真结果验证了各DPD方法DOF的

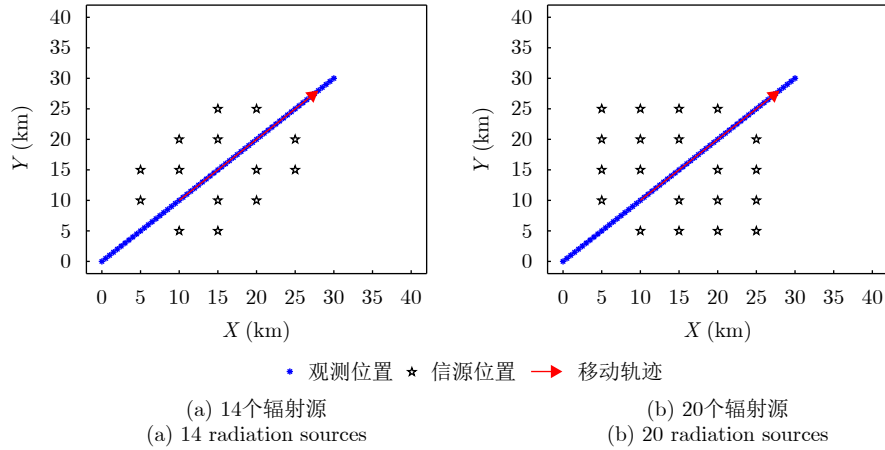


图 14 多目标定位场景示意图

Fig. 14 Schematic diagram of multi-target localization scenario

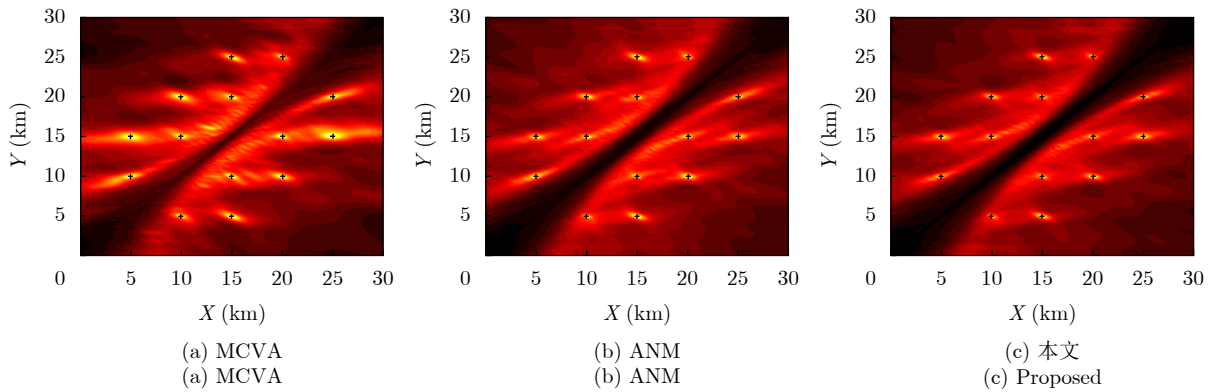


图 15 多目标代价函数谱(14个辐射源)

Fig. 15 Cost function spectrum of multi-targets (14 radiation sources)

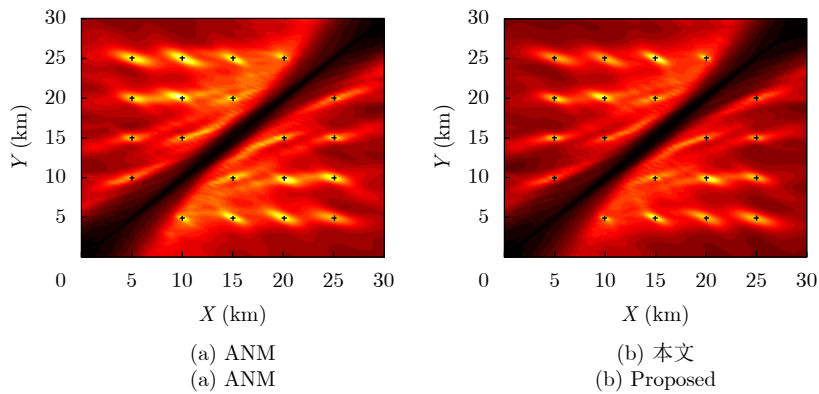


图 16 多目标代价函数谱(20个辐射源)

Fig. 16 Cost function spectrum of multi-targets (20 radiation sources)

理论分析, 虽然本文所提方法相较于ANM-DPD方法没有提升DOF, 但是在相同条件下, 其多目标分辨能力更加优异, 具有更少的假谱峰和更精准的目标位置谱峰, 且谱峰展宽和拖影现象最弱。

5.4 计算复杂度对比实验

本节通过对比运行时间, 对各DPD方法的计

算复杂度进行分析。实验运行软硬件环境为: Intel i7-12700H(2.3 GHz)处理器, 32 GB内存, 基于MATLAB R2020b软件平台。其中, ANM-DPD方法借助CVX工具箱求解凸优化问题, 本文所提方法依托APIA-ATSTC框架求解。本实验中, 辐射源数量 $Q = 1$, 位置坐标为[15, 15] km, SNR=0 dB, 快拍数 $K=20$, 观测批次 $L=7$, 观测位置依次为[30,0] km,

[30,5] km, [30,10] km, [30,15] km, [30,20] km, [30,25] km和[30,30] km, 二维搜索区域为(10 km, 20 km)×(10 km, 20 km), 搜索步长0.1 km(即101×101=10201个网格点)。对各DPD方法开展100次蒙特卡罗实验, 运行总时间如表2所示, 总体耗时排序为: ANM ≫ 本文 > MCVA, 与4.2节计算复杂度的理论分析结果一致。具体来看, (1)MCVA-DPD方法计算速度最快, 因其舍弃虚拟差分共阵非连续部分, 虚拟阵列协方差矩阵的维度最小, 矩阵分解等操作耗时随之减少; (2)ANM-DPD方法耗时最长, 一方面, 孔洞插值扩展虚拟孔径, 增加了矩阵分解等计算的耗时, 更关键的是, 其依赖凸优化算法补全协方差矩阵缺失元素, 大幅提升了计算量; (3)本文所提方法基于设计的APIA-ATSTC框架补全虚拟阵列协方差矩阵缺失元素, 有效降低了计算复杂度。

5.5 收敛性对比实验

为验证本文提出APIA-ATSTC的收敛性能, 本节与经典ADMM开展对比, 系统验证所提算法在实时性与稳定性上的优势。实验沿用5.4节的软硬件环境, 设定辐射源数量 $Q=3$, 其位置坐标分别为[15, 12] km, [15, 15] km, [15, 18] km, 观测批次 $L=11$, 观测位置依次为[30, 0] km, [30, 3] km, [30, 6] km, [30, 9] km, [30, 12] km, [30, 15] km, [30, 18] km, [30, 21] km, [30, 24] km, [30, 27] km和[30, 30] km, SNR=-5 dB, 快拍数 $K=30$, 二维搜索区域为(10 km, 20 km)×(10 km, 20 km), 搜索步长0.02 km (即501×501=251001个网格点)。实验数据生成方式如下: 基于均匀线阵(阵元数为21)移动单站DPD信号模型, 通过计算阵列接收信号的二阶统计量, 生成满足Toeplitz结构与低秩特性的真实协方差矩阵 \mathbf{X}_{true} , 并依据扩展互质差分阵列($M=3, N=4$)协方差矩阵结构特性, 在 \mathbf{X}_{true} 中指定位置构造结构性缺失孔洞, 得到含缺失矩阵 \mathbf{X}_{miss} 。为保证实验公平性, 两种算法的最大迭代次数统一设为60, 其中, 本文所提APIA-ATSTC正则化参数采用自适应策略, 无需人工干预, 而ADMM

采用经典配置, 惩罚参数和迭代步长经多次试调取最优参数组合, 避免因参数设置对性能的干扰。定义第 i 次迭代相对误差 Δ^i 以量化补全矩阵 \mathbf{X}^i 与真实矩阵 \mathbf{X}_{true} 的偏差, 而第 i 次迭代的平均相对误差 $\bar{\Delta}^i$ 为各批次第 i 次迭代相对误差的均值, 其公式分别如下:

$$\Delta^i = \frac{\|\mathbf{X}^i - \mathbf{X}_{\text{true}}\|_F}{\|\mathbf{X}_{\text{true}}\|_F} \quad (34)$$

$$\bar{\Delta}^i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Delta_l^i \quad (35)$$

其中, \mathbf{X}^i 为第 i 次迭代补全后的阵列协方差矩阵, Δ_l^i 为第 l 个批次第 i 次迭代的相对误差。图17展示了两种迭代补全算法的平均相对误差随迭代次数的变化趋势。仿真结果表明, 本文提出的APIA-ATSTC不仅初始相对误差显著低于ADMM, 且在整个迭代过程中始终保持更优的收敛精度, 最终稳定在更低的误差水平。这一结果充分验证了APIA-ATSTC在该场景下具备更高的计算精度与更出色的收敛稳定性。

6 结语

本文提出一种融合虚拟阵元RA处理和虚拟插值阵列协方差矩阵缺失元素快速补全的运动单站DPD方法, 通过RA处理抑制差分共阵等效数据噪声、零插值与Toeplitz重构恢复协方差矩阵的秩、基于设计的APIA-ATSTC框架快速补全矩阵缺失元素, 实现了“高精度-低复杂度”的协同优化。数值仿真结果表明, 该DPD方法能够显著降低凸优化算法复杂度, 提升定位精度, 具有良好的应用前景, 尤其在低信噪比和少观测数据场景下。后续研究将重点解决时间与相位同步误差、信号频率偏移及非理想辐射源频率/相位随机扰动带来的定位性能退化问题, 围绕非理想条件下误差精准建模与量化分析、阵列流形修正、抗多类干扰的鲁棒DPD算法设计开展系统研究, 突破理想实验条件约束,

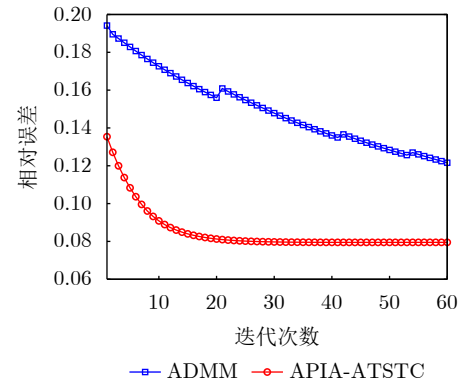


图 17 矩阵补全迭代收敛曲线

Fig. 17 Matrix completion iteration convergence curve

表 2 各DPD方法运行时间
Tab. 2 Running time of DPD methods

算法	核心步骤	运行时间(s)
MCVA	$\hat{\mathbf{R}}_l$ 计算+RD+选取连续部分+Toeplitz平滑+矩阵分解+谱峰搜索	36.75
ANM	$\hat{\mathbf{R}}_l$ 计算+RD+孔洞零插值+Toeplitz平滑+CVX补全+矩阵分解+谱峰搜索	437.63
本文	$\hat{\mathbf{R}}_l$ 计算+RA+孔洞零插值+Toeplitz平滑+APIA-ATSTC补全+矩阵分解+谱峰搜索	42.49

进一步提升所提方法的环境适应性、工程实用性与实际应用价值。

利益冲突 所有作者均声明不存在利益冲突

Conflict of Interests The authors declare that there is no conflict of interests

参 考 文 献

- [1] ZHANG Min, PEI Yuhao, LI Xi, *et al.* Passive localization by a single moving observer using TOA only with unknown SRI: Observability analysis and algorithm[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2023, 36(6): 318–331. doi: [10.1016/j.cja.2023.04.021](https://doi.org/10.1016/j.cja.2023.04.021).
- [2] 郭立民, 张逸飞, 马思达. 基于蛇优化的单站机载无源定位算法[J/OL]. *系统工程与电子技术*, 1–9[2025-12-08]. <https://link.cnki.net/urlid/11.2422.TN.20251028.1511.012>. GUO Limin, ZHANG Yifei, and MA Sida. Single station airborne passive positioning algorithm based on snake optimizer[J/OL]. *Systems Engineering and Electronics*, 1–9[2025-12-08]. <https://link.cnki.net/urlid/11.2422.TN.20251028.1511.012>.
- [3] 马晓萌, 邓东明, 沈永健, 等. 基于单站无源运动定位的多目标跟踪方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2025, 47(8): 2549–2557. doi: [10.12305/j.issn.1001-506X.2025.08.13](https://doi.org/10.12305/j.issn.1001-506X.2025.08.13). MA Xiaomeng, DENG Dongming, SHEN Yongjian, *et al.* Multi-target tracking method based on single observer passive motion location[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2025, 47(8): 2549–2557. doi: [10.12305/j.issn.1001-506X.2025.08.13](https://doi.org/10.12305/j.issn.1001-506X.2025.08.13).
- [4] LIAO Yanping, XING Chanjuan, and GUO Qiang. An enhanced secretary bird optimization algorithm for target localization based on TDOA[J]. *Physical Communication*, 2025, 73: 102853. doi: [10.1016/j.phycom.2025.102853](https://doi.org/10.1016/j.phycom.2025.102853).
- [5] ZHANG Wenjun, LI Xi, LIU Yi, *et al.* Bayesian FDOA positioning with correlated measurement noise[J]. *Remote Sensing*, 2025, 17(7): 1266. doi: [10.3390/rs17071266](https://doi.org/10.3390/rs17071266).
- [6] LUAN Fenghu and DENG Chen. Passive sensor network localization using TDOA with sensor position errors[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2025, 2999(1): 012037. doi: [10.1088/1742-6596/2999/1/012037](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2999/1/012037).
- [7] YANG Yuxiao, LI Junjie, CAI Qirui, *et al.* Research on high-precision DOA estimation method for UAV platform in strong multipath environment[J]. *Electronics*, 2026, 15(1): 134. doi: [10.3390/electronics15010134](https://doi.org/10.3390/electronics15010134).
- [8] MOHANTA K and AL-RUBAYE S. Integrated sensing and communication for UAV beamforming: Antenna design for tracking applications[J]. *Vehicles*, 2025, 7(4): 166. doi: [10.3390/vehicles7040166](https://doi.org/10.3390/vehicles7040166).
- [9] ZHU Rongxin, WANG Chao, ZHANG Qi, *et al.* A high-robustness algorithm for synthetic array using a single moving vector hydrophone[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2025, 158(5): 3656–3671. doi: [10.1121/10.0039808](https://doi.org/10.1121/10.0039808).
- [10] ZHANG Chenhao, HONG Xi, WANG Wenjie, *et al.* A fourth-order cumulant based multi-source DOA estimation for distributed UAV cooperative systems with limited communication range[J]. *Signal Processing*, 2026, 239: 110233. doi: [10.1016/j.sigpro.2025.110233](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2025.110233).
- [11] YE Chengzhi, ZHANG Ruoyu, HU Changcheng, *et al.* DOA estimation for movable antenna array systems under gain and phase errors[J]. *Physical Communication*, 2025, 72: 102808. doi: [10.1016/j.phycom.2025.102808](https://doi.org/10.1016/j.phycom.2025.102808).
- [12] ZHANG Yule, SHI Junpeng, ZHOU Hao, *et al.* Improved moving scheme for coprime arrays in direction of arrival estimation[J]. *Digital Signal Processing*, 2024, 149: 104514. doi: [10.1016/j.dsp.2024.104514](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2024.104514).
- [13] ZHANG Shidong, ZHOU Zhengchun, ZHANG Sheng, *et al.* Improved coprime-like arrays on limited platform[J]. *Signal Processing*, 2024, 220: 109474. doi: [10.1016/j.sigpro.2024.109474](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2024.109474).
- [14] YE Kun, ZHOU Lang, CHEN Zhendong, *et al.* DOA estimation based on a novel shifted coprime array structure[J]. *AEUE-International Journal of Electronics and Communications*, 2024, 179: 155308. doi: [10.1016/j.aeue.2024.155308](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2024.155308).
- [15] YANG Youzhen, WANG Jianhui, CUI Weijia, *et al.* Coherent direction of arrival estimation based on low-rank matrix recovery utilising L_2 -norm with moving coprime arrays[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2023, 17(11): 1646–1653. doi: [10.1049/rsn2.12454](https://doi.org/10.1049/rsn2.12454).
- [16] PATRA R K and DHAR A S. A novel translated coprime array configuration for moving platform in direction-of-arrival estimation[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2023, 42(4): 2494–2505. doi: [10.1007/S00034-022-02231-z](https://doi.org/10.1007/S00034-022-02231-z).
- [17] JIANG Hang, LI Jianfeng, ZHU Kehui, *et al.* Sparse direct position determination based on TDOA information in correlation-domain[J]. *Remote Sensing*, 2023, 15(15): 3705. doi: [10.3390/rs15153705](https://doi.org/10.3390/rs15153705).
- [18] HE Shuming, JIANG Yuan, ZHAO Lei, *et al.* Direct position determination of moving targets based on DOA[J]. *Electronics Letters*, 2024, 60(15): e13297. doi: [10.1049/ell2.13297](https://doi.org/10.1049/ell2.13297).
- [19] LI Jiaqi, LI Jianfeng, YOU Mingyi, *et al.* Direct position determination of coherently distributed sources based on canonical polyadic decomposition[J]. *Digital Signal Processing*, 2025, 166: 105353. doi: [10.1016/j.dsp.2025.105353](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2025.105353).
- [20] ZHAO Ziheng, GUO Rui, LIU Qi, *et al.* Direct positioning

- of multiple targets based on electromagnetic vector sensors array[J]. *Signal Processing*, 2026, 239: 110292. doi: [10.1016/j.sigpro.2025.110292](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2025.110292).
- [21] WU Guizhou, ZHANG Min, and GUO Fucheng. High-resolution direct position determination based on eigenspace using a single moving ULA[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2019, 13(5): 887–894. doi: [10.1007/s11760-019-01425-4](https://doi.org/10.1007/s11760-019-01425-4).
- [22] OISPUU M and NICKEL U. Direct detection and position determination of multiple sources with intermittent emission[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(12): 3056–3064. doi: [10.1016/j.sigpro.2010.05.010](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.05.010).
- [23] WU Guizhou, ZHANG Min, and GUO Fucheng. Self-calibration direct position determination using a single moving array with sensor gain and phase errors[J]. *Signal Processing*, 2020, 173: 107587. doi: [10.1016/j.sigpro.2020.107587](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107587).
- [24] WU Guizhou, ZHANG Min, and GUO Fucheng. On the use of a calibration emitter for direct position determination with single moving array in the presence of sensor gain and phase errors[J]. *Digital Signal Processing*, 2020, 102: 102734. doi: [10.1016/j.dsp.2020.102734](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2020.102734).
- [25] YIN Jiexin, WU Ying, and WANG Ding. Direct position determination of multiple noncircular sources with a moving array[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2017, 36(10): 4050–4076. doi: [10.1007/s00034-017-0499-4](https://doi.org/10.1007/s00034-017-0499-4).
- [26] WANG Ding, YIN Jiexin, CHEN Xin, *et al.* Direct position determination of multiple constant modulus sources based on direction of arrival and Doppler frequency shift[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2020, 39(1): 268–306. doi: [10.1007/s00034-019-01170-6](https://doi.org/10.1007/s00034-019-01170-6).
- [27] 邓杰, 尹洁昕, 杨宾. 面向非圆信号的四阶累积量直接定位方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2023, 45(9): 2690–2697. doi: [10.12305/j.issn.1001-506X.2023.09.06](https://doi.org/10.12305/j.issn.1001-506X.2023.09.06).
- DENG Jie, YIN Jiexin, and YANG Bin. Direct position determination method of fourth-order cumulant for noncircular signals[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2023, 45(9): 2690–2697. doi: [10.12305/j.issn.1001-506X.2023.09.06](https://doi.org/10.12305/j.issn.1001-506X.2023.09.06).
- [28] 郭立民, 马思达, 王丽昂. 一种基于蛇优化的单站直接定位算法[J]. *舰船电子对抗*, 2024, 47(6): 84–91. doi: [10.16426/j.cnki.jcdzdk.2024.06.017](https://doi.org/10.16426/j.cnki.jcdzdk.2024.06.017).
- GUO Limin, MA Sida, and WANG Li'ang. A single-station direct positioning algorithm based on snake optimization[J]. *Shipboard Electronic Countermeasure*, 2024, 47(6): 84–91. doi: [10.16426/j.cnki.jcdzdk.2024.06.017](https://doi.org/10.16426/j.cnki.jcdzdk.2024.06.017).
- [29] LIU Lutao, FAN Xueye, GUO Muran, *et al.* Joint estimation of location and polarization in direct position determination using a moving single station[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2025, 44(3): 1793–1816. doi: [10.1007/S00034-024-02884-y](https://doi.org/10.1007/S00034-024-02884-y).
- [30] FAN Xueye, LIU Lutao, GUO Muran, *et al.* A sparse representation direct position determination method based on iterative local search[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2025, 44(5): 3161–3181. doi: [10.1007/s00034-024-02937-2](https://doi.org/10.1007/s00034-024-02937-2).
- [31] KUMAR G, PONNUSAMY P, and AMIRI I S. Direct localization of multiple noncircular sources with a moving nested array[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 101106–101116. doi: [10.1109/ACCESS.2019.2929805](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2929805).
- [32] YAN Hangqi, WANG Yuexian, OBAIDAT M S, *et al.* Direct position determination with a moving extended nested array by spatial sparsity[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2024, 11(4): 6301–6313. doi: [10.1109/JIOT.2023.3312013](https://doi.org/10.1109/JIOT.2023.3312013).
- [33] ZHANG Yankui, XU Haiyun, BA Bin, *et al.* Direct position determination of non-circular sources based on a Doppler-extended aperture with a moving coprime array[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 61014–61021. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2875822](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2875822).
- [34] ZHANG Yankui, BA Bin, WANG Daming, *et al.* Direct position determination of multiple non-circular sources with a moving coprime array[J]. *Sensors*, 2018, 18(5): 1479. doi: [10.3390/s18051479](https://doi.org/10.3390/s18051479).
- [35] 吴癸周, 张源, 张文俊, 等. 基于互质阵列的运动单站信号直接定位方法[J]. *雷达学报*, 2022, 11(4): 692–704. doi: [10.12000/JR22056](https://doi.org/10.12000/JR22056).
- WU Guizhou, ZHANG Yuan, ZHANG Wenjun, *et al.* Coprime array based direct position determination of signals with single moving observation[J]. *Journal of Radars*, 2022, 11(4): 692–704. doi: [10.12000/JR22056](https://doi.org/10.12000/JR22056).
- [36] WANG Zhaobo, GUO Hui, MIAO Yingjie, *et al.* Direct position determination of multiple sources using a moving virtual interpolation array[J]. *Digital Signal Processing*, 2025, 159: 104973. doi: [10.1016/j.dsp.2024.104973](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2024.104973).
- [37] WANG Zhaobo, ZHANG Jun, GUO Hui, *et al.* An enhanced direct position determination of mixed circular and non-circular sources using moving virtual interpolation array[J]. *Sensors*, 2024, 24(20): 6718. doi: [10.3390/s24206718](https://doi.org/10.3390/s24206718).
- [38] 周善石, 胡小工, 刘利, 等. 导航卫星精密定轨与时间同步技术进展[J]. *天文学报*, 2019, 60(4): 32. doi: [10.15940/j.cnki.0001-5245.2019.04.005](https://doi.org/10.15940/j.cnki.0001-5245.2019.04.005).
- ZHOU Shanshi, HU Xiaogong, LIU Li, *et al.* Status of satellite orbit determination and time synchronization technology for global navigation satellites system[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2019, 60(4): 32. doi: [10.15940/j.cnki.0001-5245.2019.04.005](https://doi.org/10.15940/j.cnki.0001-5245.2019.04.005).
- [39] 刘瑞, 郭沐然, 孙昭乾. 移动平台正交偶极子阵列下的解相干 DOA 估计算法[J]. *信号处理*, 2025, 41(7): 1219–1228. doi: [10.1007/S00034-024-02884-y](https://doi.org/10.1007/S00034-024-02884-y).

- 12466/xhcl.2025.07.007.
- LIU Rui, GUO Muran, and SUN Zhaoqian. Decoherence direction of arrival estimation algorithm based on orthogonal dipole array for mobile platforms[J]. *Journal of Signal Processing*, 2025, 41(7): 1219–1228. doi: [10.12466/xhcl.2025.07.007](https://doi.org/10.12466/xhcl.2025.07.007).
- [40] 郇浩, 陶选如, 陶然, 等. 多普勒频率变化率快速最大似然估计辅助的高动态载波跟踪环路[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(3): 577–582. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.00638](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.00638).
- HUAN Hao, TAO Xuanru, TAO Ran, *et al.* Carrier tracking loop in high dynamic environment aided by fast maximum likelihood estimation of Doppler frequency rate-of-change[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(3): 577–582. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.00638](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.00638).
- [41] 金磊. 高动态环境下载波频率的精确估计算法[J]. 航天控制, 2018, 36(6): 47–52. doi: [10.16804/j.cnki.issn1006-3242.2018.06.009](https://doi.org/10.16804/j.cnki.issn1006-3242.2018.06.009).
- JIN Lei. Accuracy estimation algorithm for carrier frequency under high dynamic condition[J]. *Aerospace Control*, 2018, 36(6): 47–52. doi: [10.16804/j.cnki.issn1006-3242.2018.06.009](https://doi.org/10.16804/j.cnki.issn1006-3242.2018.06.009).
- [42] 张苗, 高宏亮, 邓志安. 基于虚拟阵列孔洞插值的互质阵列直接定位方法[J]. 舰船电子工程, 2024, 44(2): 70–75. doi: [10.3969/j.issn.1672-9730.2024.02.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1672-9730.2024.02.015).
- ZHANG Miao, GAO Hongliang, and DENG Zhi'an. Direct position determination of coprime array based on hole interpolation of virtual array[J]. *Ship Electronic Engineering*, 2024, 44(2): 70–75. doi: [10.3969/j.issn.1672-9730.2024.02.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1672-9730.2024.02.015).
- [43] 孙兵, 阮怀林, 吴晨曦, 等. 基于Toeplitz协方差矩阵重构的互质阵列DOA估计方法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: [10.11999/JEIT181041](https://doi.org/10.11999/JEIT181041).
- SUN Bing, RUAN Huailin, WU Chenxi, *et al.* Direction of arrival estimation with coprime array based on Toeplitz covariance matrix reconstruction[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: [10.11999/JEIT181041](https://doi.org/10.11999/JEIT181041).
- [44] QI Bingbing, LIU Xiaogang, DOU Daowei, *et al.* An enhanced DOA Estimation method for coherent sources via Toeplitz matrix reconstruction and Khatri-Rao subspace[J]. *Electronics*, 2023, 12(20): 4268. doi: [10.3390/electronics12204268](https://doi.org/10.3390/electronics12204268).
- [45] AOUNALLAH N. Robust min-norm algorithms for coherent sources DOA estimation based on Toeplitz matrix reconstruction methods[J]. *International Journal of Wireless and Mobile Computing*, 2023, 24(1): 9–16. doi: [10.1504/ijwmc.2023.129082](https://doi.org/10.1504/ijwmc.2023.129082).
- [46] GAO Kaixin, HUANG Zhenghai, and GUO Lulu. Low-rank matrix recovery problem minimizing a new ratio of two norms approximating the rank function then using an ADMM-type solver with applications[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, 438: 115564. doi: [10.1016/j.cam.2023.115564](https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115564).
- [47] ZHOU Lang, YE Kun, and ZHANG Xuebo. Two-dimensional direction finding for L-shaped coprime array via minimization of the ratio of the nuclear norm and the Frobenius norm[J]. *Remote Sensing*, 2024, 16(18): 3543. doi: [10.3390/rs16183543](https://doi.org/10.3390/rs16183543).
- [48] RECHT B, FAZEL M, and PARRILO P A. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization[J]. *SIAM Review*, 2010, 52(3): 471–501. doi: [10.1137/070697835](https://doi.org/10.1137/070697835).
- [49] BOYD S, PARIKH N, CHU E, *et al.* Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1–122. doi: [10.1561/22000000016](https://doi.org/10.1561/22000000016).

作者简介

王鸿帧, 博士生, 工程师, 主要研究方向为无源定位、阵列信号处理等。

王 鼎, 教授, 主要研究方向为无源定位、阵列信号处理等。

聂福全, 教授, 主要研究方向为工程机械设计、目标定位等。

唐 涛, 教授, 主要研究方向为无线电智能测向定位、阵列信号处理等。

(责任编辑: 于青)