低仰角目标高精度波束空间DOA估计方法

刘 旗 郭 瑞* 王佳佳 徐世友 陈曾平
(中山大学电子与通信工程学院 深圳 518107)

摘要：低仰角目标波达方向(DOA)估计是米波雷达与全息凝视雷达中的关键问题，其估计误差直接影响目标的测高精度。传统波束空间方法通过构建波束形成器，将高维阵元空间数据映射至低维波束空间以降低计算复杂度。然而，该类方法的有损映射会造成部分目标信息丢失，使目标仰角估计精度显著低于阵元空间方法。为解决这一问题，该文提出了一种低仰角目标高精度波束空间DOA估计方法。首先，推导了阵元空间与波束空间中DOA估计的克拉美罗界(CRB)，并分析了两者相等所需满足的充分条件。由于该条件在实际应用中难以严格满足，该文进一步提出一种基于近似条件的波束形成器设计方法。该方法在降低数据维度的同时，最大限度保留目标的有效信息。最后，基于最大似然准则实现了目标仰角的精确估计。仿真与实测结果表明，所提方法在显著降低处理数据维度的同时，能够在低仰角观测区域内保持与阵元空间方法相近的估计精度，并优于现有波束空间算法。

关键词：低仰角目标；波达方向(DOA)估计；波束空间处理；克拉美罗界(CRB)；多径效应；最大似然

中图分类号：TN958 **文献标识码：**A **文章编号：**2095-283X(2025)x-0001-16

DOI: 10.12000/JR25173 **CSTR**: 32380.14.JR25173

引用格式：刘旗, 郭瑞, 王佳佳, 等. 低仰角目标高精度波束空间DOA估计方法[J]. 雷达学报(中英文), 待出版. doi: 10.12000/JR25173.

Reference format: LIU Qi, GUO Rui, WANG Jiajia, *et al.* A high-accuracy beamspace DOA estimation method for low-elevation angle targets[J]. *Journal of Radars*, in press. doi: 10.12000/JR25173.

A High-accuracy Beamspace DOA Estimation Method for Low-elevation Angle Targets

LIU Qi GUO Rui* WANG Jiajia XU Shiyou CHEN Zengping
(*School of Electronics and Communication Engineering*, *Sun Yat-sen University*, *Shenzhen* 518107, *China*)

Abstract: Direction of Arrival (DOA) estimation for low-elevation angle targets is a critical challenge in meter-wave and holographic staring radar systems, as its accuracy directly affects target height measurement performance. Traditional beamspace methods reduce computational complexity by projecting high-dimensional element-space data onto a low-dimensional beamspace using a beamformer. However, this lossy mapping leads to partial information loss, resulting in degraded elevation-angle estimation accuracy compared to that of element-space methods. To address this issue, this study proposes a high-accuracy beamspace DOA estimation method for low-elevation angle targets. First, the Cramér-Rao Bound (CRB) for both element-space and beamspace DOA estimation is derived, and the conditions under which these bounds are equal are analyzed. Since these conditions are difficult to satisfy in practical scenarios, an approximate-condition-based beamformer

收稿日期：2025-09-10；改回日期：2025-12-13；网络出版：2025-12-31
*通信作者： 郭瑞 guor29@mail.sysu.edu.cn *Corresponding Author: GUO Rui, guor29@mail.sysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(U2133216)，深圳市科技计划资助(KQTD20190929172704911)，广东省科技技术项目(2019ZT08X751)，广东省科技厅先进智能感知技术重点实验室科技规划项目(2023B1212060024)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (U2133216), Shenzhen Science and Technology Program (KQTD20190929172704911), Guangdong Provincial Science and Technology Program (2019ZT08X751), Science and Technology Planning Project of Key Laboratory of Advanced Intellisense Technology, Guangdong Science and Technology Department (2023B1212060024)
责任主编：陈小龙 Corresponding Editor: CHEN Xiaolong

©The Author(s) 2025. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License
(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

design strategy is developed to reduce data dimensionality while preserving effective target information. Finally, precise elevation-angle estimation is achieved using the maximum likelihood criterion. Simulation and experimental results show that the proposed method significantly reduces data dimensionality while maintaining estimation accuracy comparable to that of element-space methods at low-elevation angles, clearly outperforming existing beamspace algorithms.

Key words: Low-elevation angle target; Direction of Arrival (DOA) estimation; Beamspace processing; Cramér-Rao Bound (CRB); Multipath effect; Maximum likelihood

1 引言

波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计是实现目标定位与跟踪的关键技术，广泛应用于雷达探测、无线通信及无人驾驶等领域[1–6]。对无人机、巡航导弹等低空突防目标的精确测量与定位高度依赖于低仰角目标DOA的精确估计[7,8]。然而，由地面反射产生的多径信号往往与目标直达信号高度相干，并且二者通常位于雷达主波束覆盖范围内，难以在时域、空域及多普勒域中实现有效分离，从而显著增加了低仰角目标DOA估计的难度[9–12]。在米波雷达与全息凝视雷达等系统中，这一问题尤为突出[13–16]。为克服上述挑战，已有研究提出多种基于米波雷达的低仰角目标DOA估计方法[17–19]，以提高低仰角目标的DOA估计精度。

超分辨阵列信号处理技术突破了传统瑞利分辨率的限制，能够有效分辨位于同一波束宽度内的多个目标方向[20]，已成为低仰角目标DOA估计的重要手段。目前，该类算法主要面向传统相控阵雷达系统，典型算法包括子空间类、最大似然类和压缩感知类方法。作为子空间类方法的代表，多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)[21]算法已被广泛应用于DOA估计。然而，在低仰角目标场景下，直达路径信号与多径信号往往高度相干，导致经典MUSIC算法性能显著下降。为缓解相干源引起的性能退化问题，空间平滑MUSIC[22]、广义MUSIC[23]以及交替投影MUSIC (Alternating Projection MUSIC, APMUSIC)[24]等改进算法被相继提出。基于最大似然准则的方法能够在相干与非相干信号环境下均实现超分辨DOA估计，典型方法包括交替投影最大似然(Alternating Projection Maximum Likelihood, APML)[25]和精确最大似然(Refined Maximum Likelihood, RML)[26]算法。APML算法通过交替迭代策略，将复杂的多维参数优化问题转化为一系列一维参数优化问题，实现目标仰角与多径到达角的联合估计。RML算法则融合目标距离、天线高度及反射路径几何结构等先验信息，在提高估计精度的同时降低了计算复杂度，但对先验信息的准确性依赖较强。

上述两类算法大多基于经典理想多径模型，即假设反射面平坦且仅考虑一条稳定的镜面反射路径。然而，在实际低空探测中，地形往往复杂起伏，地表反射特性随时间和空间变化呈现非平稳性，使得多径传播路径偏离理想模型假设，从而引发严重的模型失配问题，导致仰角估计性能显著下降[27]。为应对起伏地形和多径不确定性等非理想因素带来的挑战，AP-Newton (Alternating Projection Newton)[28]算法引入多散射中心等效模型，将复杂地面反射的多条传播路径等效为一条反射路径，并结合交替投影技术与牛顿法实现了目标仰角和等效多径到达角的精确估计。此外，压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论也被广泛应用于低仰角目标DOA估计。该类方法利用目标仰角与多径到达角在空域中的稀疏分布特性进行建模，无须依赖具体传播模型和反射路径数量等先验信息，能够在地形起伏、信噪比低和快拍数有限等复杂场景下表现出较强的鲁棒性。然而，现有压缩感知类方法[29–31]在实际工程应用中仍存在参数依赖性强、计算开销较大等问题，尚需在模型构建与算法实现方面进一步优化，以满足工程化部署需求。

尽管当前研究更倾向于复杂地形条件下的低仰角目标DOA估计问题[32]，但在许多典型的工程应用场景(平原及机场近地空域)中，地表反射面通常较为平坦，且主要存在单一稳定的镜面反射路径。此类平坦地形在低空目标探测任务中具有典型代表性和工程应用价值。随着阵列规模的持续扩大及实时处理需求的不断提升，阵元空间算法在数据传输与计算复杂度方面的开销日益增加。因此，针对典型平坦地形的低仰角场景，开展基于单镜面反射模型的低复杂度、高精度DOA估计算法的研究，具有重要的理论意义与工程应用价值。基于上述需求，亟须设计一种兼具高精度与低复杂度的低仰角目标DOA估计算法，以在保持仰角估计精度的同时显著降低算法的计算复杂度。

针对上述问题，研究者提出了基于波束空间的低仰角目标DOA估计方法。该类方法通过构造波束形成器，将高维阵元空间数据映射至低维波束空

间，从而有效降低数据维度并减轻计算负担，但通常以牺牲部分空间自由度为代价。3D-BML (Three-Dimensional Beamspace Maximum Likelihood)[33]算法利用3个波束构建波束形成器，将接收数据从阵元空间映射至波束空间，并基于最大似然准则实现低仰角目标DOA的快速估计。但其波束形成器的空间覆盖范围有限，导致部分低仰角区域出现较大的估计误差。为进一步提升波束形成器的空间覆盖能力，Chen等人[34]提出了基于和差波束的精确最大似然(Refined Maximum Likelihood Based on Sum and Difference Beams, RML-SDB)算法。该方法构造的波束形成器同时包含和波束与差波束权矢量，不仅扩展了空间覆盖范围，还提高了目标方向的有效增益。尽管上述波束空间算法在计算复杂度和处理效率方面具有优势，但波束形成映射过程中不可避免地丢失部分有效目标信息，导致DOA估计精度较阵元空间方法显著下降。因此，如何设计一种既能实现有效降维，又能最大限度保留目标关键信息的波束形成器，已成为当前波束空间低仰角目标DOA估计亟须解决的关键研究问题。

针对现有波束空间低仰角目标DOA估计算法精度显著低于阵元空间方法的问题，本文提出了一种高精度波束空间DOA估计方法。首先，推导了阵元空间与波束空间中低仰角目标DOA估计的克拉美罗界(Cramér-Rao Bound, CRB)，并分析了两者相等所需满足的充分条件。由于该条件在实际应用中难以严格满足，本文进一步提出一种基于近似条件的波束形成器设计方法，以在实现降维的同时尽可能保留接收数据中的有效目标信息。随后，基于最大似然准则构建了目标仰角与多径到达角的联合估计代价函数。结合二者之间的几何关系，将原二维参数优化问题转化为一维优化问题，从而以较低的计算复杂度实现目标仰角的精确估计。所提方法通过设计的波束形成器实现了接收数据从阵元空间到低维波束空间的近似无损映射，有效避免了现有波束空间方法因信息丢失导致的性能退化。在计算复杂度与3D-BML和RML-SDB方法相当的前提下，所提方法在整个低仰角观测区域内的仰角估计精度可逼近阵元空间方法的理论CRB。

本文的主要创新点如下：

(1) 推导了阵元空间与波束空间中低仰角目标DOA估计的CRB，并分析了两者相等所需满足的充分条件，为波束形成器设计提供了重要的理论依据。

(2) 针对理论充分条件在实际中难以严格满足的问题，提出了一种基于近似条件约束的波束形成器设计方法。该方法在降低观测数据维度的同时，最大限度保留目标信号的有效信息，实现了阵元空间数据向波束空间的近似无损映射，从而有效避免了传统波束空间预处理会导致目标仰角估计精度明显下降的问题。

(3) 通过理论分析、仿真与实测结果验证了所提方法的有效性与优越性。结果表明该方法在显著降低处理数据维度的同时，能够在低仰角观测区域内实现接近阵元空间方法的估计精度，整体性能优于现有波束空间算法。

2　信号模型

考虑一个配备均匀线阵的数字阵列雷达，其中均匀线阵由M个阵元构成，阵元间距为d，满足$d=\lambda/2$，其中λ表示波长。图1为低仰角目标的多径传播几何模型，目标回波通过直接路径与间接路径传播至雷达接收阵列。直接路径指目标回波经自由空间传播直接到达接收阵列，间接路径指目标回波经地面反射后到达接收阵列。接收阵列中心高度和目标高度分别为$h_{\rm a}$和$h_{\rm t}$，目标仰角和多径到达角分别为$\theta_{\rm d}$和$\theta_{\rm s}$，直接路径距离和间接路径距离分别为$R_{\rm d}$和$R_{\rm s}$。假设地平线以上的角度为正，地平线以下的角度为负。在窄带信号条件下，传播时延主要表现为相位变化，对信号复包络影响可忽略。因此，在第l个快拍时刻阵列接收信号可表示为

$$\boldsymbol{x}(l)=\beta\left[\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d}),\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})\right]\left[1,\overline{\rho}\right]^{\rm T}s(l)+\boldsymbol{n}(l),l=1,2,\cdots,L \tag{1}$$

其中，β为复散射系数，用于表征目标散射特性及传播路径的损耗；$s(l)$表示第l个快拍时刻的复包络信号。$\overline{\rho}=\rho{\rm e}^{-{\rm j}2\pi\Delta R/\lambda}$为多径衰减系数，其中$\rho$为镜面反射系数，$\Delta R=R_{\rm s}-R_{\rm d}$表示间接路径与直接路径之间的传播距离差。$\boldsymbol{n}(l)\in\mathbb{C}^{M\times 1}$为复加性高斯白噪声，其均值和方差分别为0和$\sigma_n^2$。$L$表示快拍数。$\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})$和$\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})$分别表示目标仰角和多径到达角的导向矢量，分别表示为

$$\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})=\left[1,{\rm e}^{-{\rm j}2\pi d\sin(\theta_{\rm d})/\lambda},\cdots,{\rm e}^{-{\rm j}2\pi(M-1)d\sin(\theta_{\rm d})/\lambda}\right]^{\rm T} \tag{2}$$

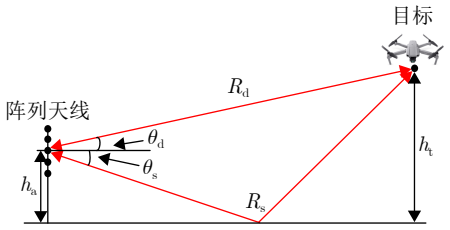

图 1 低仰角目标多径传播几何模型

Fig. 1 Geometric model of low-elevation target multipath propagation

$$\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})=\left[1,{\rm e}^{-{\rm j}2\pi d\sin(\theta_{\rm s})/\lambda},\cdots,{\rm e}^{-{\rm j}2\pi(M-1)d\sin(\theta_{\rm s})/\lambda}\right]^{\rm T} \tag{3}$$

将L个快拍对应的接收数据写成维度为$M\times L$的矩阵$\boldsymbol{X}$，可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=[\boldsymbol{x}(1),\boldsymbol{x}(2),\cdots,\boldsymbol{x}(l),\cdots,\boldsymbol{x}(L)]\\&=\boldsymbol{A}[1,\overline{\rho}]^{\rm T}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{N}\end{aligned} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d}),\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})]$，$\boldsymbol{s}=[\beta s(1),\beta s(2),\cdots,\beta s(l),\cdots,\beta s(L)]\in\mathbb{C}^{1\times L}$，$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{n}(1),\boldsymbol{n}(2),\cdots,\boldsymbol{n}(l),\cdots,\boldsymbol{n}(L)]\in\mathbb{C}^{M\times L}$。本文目标是根据接收数据矩阵$\boldsymbol{X}$估计未知的目标仰角$\theta_{\rm d}$。

3 低仰角目标DOA估计的CRB推导

本节推导了阵元空间与波束空间中低仰角目标DOA估计的CRB，并将其作为算法性能评估的理论参考。在此基础上，通过理论分析进一步推导出两种空间中CRB相等的充分条件，为后续波束形成器的设计提供了理论依据。

3.1 阵元空间低仰角目标DOA估计的CRB推导

阵元空间中接收数据的协方差矩阵可表示为

$$\boldsymbol{R}=\sigma_{\rm s}^2\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\rm H}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_M \tag{5}$$

其中，$\sigma_{\rm s}^2=E\left[\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\rm H}\right]$，$\sigma_n^2$表示噪声功率，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})+\overline{\rho}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})$表示阵元空间接收信号的复合导向矢量。

协方差矩阵$\boldsymbol{R}$中包含以下未知参数：$\eta_i,\eta_j\in\left[\theta_{\rm d},\theta_{\rm s},\overline{\rho}_{\rm Re},\overline{\rho}_{\rm Im},\sigma_{\rm s}^2\right]$，其中$\overline{\rho}_{\rm Re}$和$\overline{\rho}_{\rm Im}$分别表示多径衰减系数$\overline{\rho}$的实部和虚部。根据图1所示的平面多径模型中目标仰角与多径到达角之间的几何关系，可得

$$\theta_{\rm d}=\arcsin\left[(h_{\rm t}-h_{\rm a})/R_{\rm d}\right] \tag{6}$$

$$\theta_{\rm s}=-\arcsin\left[(h_{\rm t}+h_{\rm a})/R_{\rm s}\right] \tag{7}$$

在低仰角条件下$R_{\rm s}\approx R_{\rm d}$，由式(6)和式(7)可得目标仰角$\theta_{\rm d}$和多径到达角$\theta_{\rm s}$的关系为

$$\begin{aligned}\theta_{\rm s}&=-\arcsin\left[(h_{\rm a}+h_{\rm t})/R_{\rm d}\right]\\&=-\arcsin\left[\sin(\theta_{\rm d})+2h_{\rm a}/R_{\rm d}\right]\end{aligned} \tag{8}$$

由式(8)可知，多径到达角$\theta_{\rm s}$可由目标仰角$\theta_{\rm d}$确定，因此可将$\boldsymbol{R}$中的未知参数简化为$\eta_i,\eta_j\in\left[\theta_{\rm d},\overline{\rho}_{\rm Re},\overline{\rho}_{\rm Im},\sigma_{\rm s}^2\right]$。

未知参数对应的Fisher信息矩阵$\boldsymbol{F}^E$可表示为

$$\boldsymbol{F}^E=\begin{bmatrix}F^E_{\theta_{\rm d}\theta_{\rm d}} & F^E_{\theta_{\rm d}\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^E_{\theta_{\rm d}\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^E_{\theta_{\rm d}\sigma_{\rm s}^2}\\ F^E_{\overline{\rho}_{\rm Re}\theta_{\rm d}} & F^E_{\overline{\rho}_{\rm Re}\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^E_{\overline{\rho}_{\rm Re}\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^E_{\overline{\rho}_{\rm Re}\sigma_{\rm s}^2}\\ F^E_{\overline{\rho}_{\rm Im}\theta_{\rm d}} & F^E_{\overline{\rho}_{\rm Im}\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^E_{\overline{\rho}_{\rm Im}\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^E_{\overline{\rho}_{\rm Im}\sigma_{\rm s}^2}\\ F^E_{\sigma_{\rm s}^2\theta_{\rm d}} & F^E_{\sigma_{\rm s}^2\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^E_{\sigma_{\rm s}^2\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^E_{\sigma_{\rm s}^2\sigma_{\rm s}^2}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{4\times 4} \tag{9}$$

其中，矩阵$\boldsymbol{F}^E$中的任意元素$F^E_{\eta_i\eta_j}$定义为[35]

$$F^E_{\eta_i\eta_j}=L\cdot{\rm tr}\left(\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_j}\right) \tag{10}$$

其中，${\rm tr}(\cdot)$表示提取矩阵的迹。

$\boldsymbol{R}$中关于未知参数$\eta_i\in\left[\theta_{\rm d},\overline{\rho}_{\rm Re},\overline{\rho}_{\rm Im},\sigma_{\rm s}^2\right]$的偏导数可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}=\sigma_{\rm s}^2\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{y}^{\rm H}+\sigma_{\rm s}^2\boldsymbol{y}\dfrac{\partial\boldsymbol{y}^{\rm H}}{\partial\eta_i},\eta_i\in[\theta_{\rm d},\overline{\rho}_{\rm Re},\overline{\rho}_{\rm Im}]\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}=\dfrac{\partial\sigma_{\rm s}^2\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\rm H}}{\partial\sigma_{\rm s}^2}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\rm H},\qquad\eta_i\in\left[\sigma_{\rm s}^2\right]\end{cases} \tag{11}$$

将式(11)代入式(10)，化简结果如下：

$$\begin{cases}F^E_{\eta_i\eta_j}=2\left(\sigma_{\rm s}^2\right)^2L\cdot{\rm Re}\left(\boldsymbol{y}^{\rm H}\boldsymbol{R}^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{y}^{\rm H}\boldsymbol{R}^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\eta_j}\right.\\ \qquad\left.+\boldsymbol{y}^{\rm H}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}\dfrac{\partial\boldsymbol{y}^{\rm H}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{R}^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\eta_j}\right)\\ F^E_{\eta_i\sigma_{\rm s}^2}=F^E_{\sigma_{\rm s}^2\eta_i}=2\sigma_{\rm s}^2L\cdot{\rm Re}\left(\boldsymbol{y}^{\rm H}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\rm H}\boldsymbol{R}^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\eta_i}\right)\\ F^E_{\sigma_{\rm s}^2\sigma_{\rm s}^2}=L\cdot\left(\boldsymbol{y}^{\rm H}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\rm H}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}\right)\end{cases} \tag{12}$$

其中，复合导向矢量$\boldsymbol{y}$关于未知参数$[\theta_{\rm d},\overline{\rho}_{\rm Re},\overline{\rho}_{\rm Im}]$的偏导数分别为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\theta_{\rm d}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})}{\partial\theta_{\rm d}}+\overline{\rho}\dfrac{\partial\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})}{\partial\theta_{\rm s}}\dfrac{\partial\theta_{\rm s}}{\partial\theta_{\rm d}}\\ \qquad=\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})\odot\boldsymbol{d}(\theta_{\rm d})+\overline{\rho}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})\odot\boldsymbol{d}(\theta_{\rm s})\dfrac{\partial\theta_{\rm s}}{\partial\theta_{\rm d}}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\overline{\rho}_{\rm Re}}=\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\overline{\rho}_{\rm Im}}={\rm j}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})\end{cases} \tag{13}$$

其中，$\odot$表示Hadamard积。$\boldsymbol{d}(\theta_{\rm d})$，$\boldsymbol{d}(\theta_{\rm s})$和$\dfrac{\partial\theta_{\rm s}}{\partial\theta_{\rm d}}$分别为

$$\boldsymbol{d}(\theta_{\rm d})=[0,1,\cdots,M-1]^{\rm T}\frac{-{\rm j}2\pi d\cos(\theta_{\rm d})}{\lambda} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{d}(\theta_{\rm s})=[0,1,\cdots,M-1]^{\rm T}\frac{-{\rm j}2\pi d\cos(\theta_{\rm s})}{\lambda} \tag{15}$$

$$\frac{\partial\theta_{\rm s}}{\partial\theta_{\rm d}}=\frac{\cos(\theta_{\rm d})}{\sqrt{1-\left(\sin(\theta_{\rm d})+\dfrac{2h_{\rm a}}{R_{\rm d}}\right)^2}} \tag{16}$$

根据式(10)—式(16)可以计算Fisher信息矩阵$\boldsymbol{F}^E$中的任意元素$F_{\eta_i\eta_j}$，进而可得到目标仰角$\theta_{\rm d}$估计的CRB为

$${\rm CRB}_E\left(\theta_{\rm d}\right)=\left[\left(\boldsymbol{F}^E\right)^{-1}\right]_{1,1} \tag{17}$$

3.2 波束空间低仰角目标DOA估计的CRB推导

波束空间中接收数据的协方差矩阵可表示为

$$\boldsymbol{R}_B = \sigma_{\rm s}^2 \boldsymbol{y}_B \boldsymbol{y}_B^{\rm H} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_B \tag{18}$$

其中，$\boldsymbol{y}_B = \boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d}) + \boldsymbol{T}^{\rm H}\overline{\rho}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})$ 表示波束空间中接收信号的复合导向矢量，$\boldsymbol{T}$为波束形成器，即波束形成矩阵，用于将阵元空间接收数据映射至波束空间。

波束空间中未知参数对应的Fisher信息矩阵$\boldsymbol{F}^B$可表示为

$$\boldsymbol{F}^B = \begin{bmatrix} F^B_{\theta_{\rm d}\theta_{\rm d}} & F^B_{\theta_{\rm d}\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^B_{\theta_{\rm d}\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^B_{\theta_{\rm d}\sigma_{\rm s}^2} \\ F^B_{\overline{\rho}_{\rm Re}\theta_{\rm d}} & F^B_{\overline{\rho}_{\rm Re}\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^B_{\overline{\rho}_{\rm Re}\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^B_{\overline{\rho}_{\rm Re}\sigma_{\rm s}^2} \\ F^B_{\overline{\rho}_{\rm Im}\theta_{\rm d}} & F^B_{\overline{\rho}_{\rm Im}\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^B_{\overline{\rho}_{\rm Im}\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^B_{\overline{\rho}_{\rm Im}\sigma_{\rm s}^2} \\ F^B_{\sigma_{\rm s}^2\theta_{\rm d}} & F^B_{\sigma_{\rm s}^2\overline{\rho}_{\rm Re}} & F^B_{\sigma_{\rm s}^2\overline{\rho}_{\rm Im}} & F^B_{\sigma_{\rm s}^2\sigma_{\rm s}^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \tag{19}$$

其中，矩阵$\boldsymbol{F}^B$中的任意元素$F^B_{\eta_i\eta_j}$可表示为

$$F^B_{\eta_i\eta_j} = L\cdot {\rm tr}\left(\boldsymbol{R}_B^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{R}_B}{\partial \eta_i}\boldsymbol{R}_B^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{R}_B}{\partial \eta_j}\right) \tag{20}$$

为推导波束空间中的CRB，可将阵元空间CRB推导中的复合导向矢量$\boldsymbol{y}$替换为$\boldsymbol{y}_B$，协方差矩阵$\boldsymbol{R}$替换为$\boldsymbol{R}_B$，并将式(13)中的偏导数项替换为波束空间对应的偏导数表达式(22)。由此可得波束空间中目标仰角$\theta_{\rm d}$估计的CRB为

$$\mathrm{CRB}_B(\theta_{\rm d}) = \left[\left(\boldsymbol{F}^B\right)^{-1}\right]_{1,1} \tag{21}$$

其中，波束空间复合导向矢量$\boldsymbol{y}_B$对各未知参数的偏导数分别为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{y}_B}{\partial \theta_{\rm d}} = \boldsymbol{T}^{\rm H}\dfrac{\partial \boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})}{\partial \theta_{\rm d}} + \boldsymbol{T}^{\rm H}\overline{\rho}\dfrac{\partial \boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})}{\partial \theta_{\rm s}}\dfrac{\partial \theta_{\rm s}}{\partial \theta_{\rm d}} \\ \qquad = \boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})\odot \boldsymbol{d}(\theta_{\rm d}) + \boldsymbol{T}^{\rm H}\overline{\rho}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})\odot \boldsymbol{d}(\theta_{\rm s})\dfrac{\partial \theta_{\rm s}}{\partial \theta_{\rm d}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{y}_B}{\partial \overline{\rho}_{\rm Re}} = \boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s}) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{y}_B}{\partial \overline{\rho}_{\rm Im}} = {\rm j}\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{a}(\theta_{\rm s}) \end{cases} \tag{22}$$

3.3 波束空间与阵元空间低仰角目标DOA估计CRB相等的充分条件推导

为避免波束空间方法在压缩接收数据维度的过程中造成低仰角目标DOA估计精度下降，本小节推导了波束空间与阵元空间低仰角目标DOA估计CRB相等所需满足的充分条件。推导结果表明，当波束形成器在低仰角观测区域内的增益保持为1时，波束空间与阵元空间的Fisher信息矩阵完全一致，从而保证两者的CRB相等。然而，在实际应用中该条件往往难以严格满足，因此进一步提出了近似条件：当波束形成器在低仰角观测区域内的增益近似等于1 时，两种空间中低仰角目标DOA估计的CRB近似相等。该近似条件可为后续波束形成器的设计提供理论依据。

引理1　设波束形成器$\boldsymbol{T}\in\mathbb{C}^{M\times B}$满足$\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}_B$，则其在测试角度$\varphi$处的增益为

$$g(\varphi) = \frac{\boldsymbol{c}^{\rm H}(\varphi)\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{c}(\varphi)}{\boldsymbol{c}^{\rm H}(\varphi)\boldsymbol{c}(\varphi)} = \frac{\left|\left|\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2}{\left|\left|\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2} \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{c}(\varphi)$表示测试角度φ下的导向矢量，例如均匀线阵可写为

$$\boldsymbol{c}(\varphi) = \left[1, {\rm e}^{-{\rm j}2\pi d\sin(\varphi)/\lambda}, \cdots, {\rm e}^{-{\rm j}2\pi(M-1)d\sin(\varphi)/\lambda}\right]^{\rm T} \tag{24}$$

若在低仰角观测区域Θ内的角度φ均有

$$g(\varphi) = 1 \tag{25}$$

则有

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{c}(\varphi) = \boldsymbol{c}(\varphi), \forall\varphi\in\Theta \tag{26}$$

即$\boldsymbol{c}(\varphi)\in{\rm Range}(\boldsymbol{T})$，且算子$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}$在$\boldsymbol{c}(\varphi)$上的作用等价于恒等映射。

证明：记$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}$，则$\boldsymbol{P}$为投影到Range($\boldsymbol{T}$)的正交投影算子，满足$\boldsymbol{P}^{\rm H} = \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$。由此有

$$\left|\left|\boldsymbol{P}\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2 = \boldsymbol{c}^{\rm H}(\varphi)\boldsymbol{P}\boldsymbol{c}(\varphi) = \left|\left|\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2 \tag{27}$$

因此式(23)可改写为

$$g(\varphi) = \frac{\left|\left|\boldsymbol{P}\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2}{\left|\left|\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2} \tag{28}$$

另外，向量$\boldsymbol{c}(\varphi)$可分解为

$$\boldsymbol{c}(\varphi) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{c}(\varphi) + \left(\boldsymbol{I}_M - \boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{c}(\varphi) \tag{29}$$

由正交性可得

$$\left|\left|\boldsymbol{P}\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2 = \left|\left|\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2 - \left|\left|\left(\boldsymbol{I}_M - \boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2 \tag{30}$$

将式(30)代入式(28)，可得

$$g(\varphi) = 1 - \frac{\left|\left|\left(\boldsymbol{I}_M - \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}\right)\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2}{\left|\left|\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right|^2} \tag{31}$$

若$g(\varphi) = 1, \forall\varphi\in\Theta$，则$\left(\boldsymbol{I}_M - \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}\right)\boldsymbol{c}(\varphi) = 0$，即

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{c}(\varphi) = \boldsymbol{c}(\varphi), \forall\varphi\in\Theta \tag{32}$$

证毕。

推论1　在引理1的条件下，若$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{c}(\varphi) = \boldsymbol{c}(\varphi)$, $\forall\varphi\in\Theta$，记$\boldsymbol{c}'(\varphi) = \dfrac{\partial \boldsymbol{c}(\varphi)}{\partial\varphi}$。则有

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\rm H}\boldsymbol{c}'(\varphi) = \boldsymbol{c}'(\varphi), \forall\varphi\in\Theta \tag{33}$$

进一步定义有效信息子空间为

$$\mathcal{U} = {\rm span}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_{\rm d}), \boldsymbol{a}(\theta_{\rm s}), \frac{\partial \boldsymbol{a}(\theta_{\rm d})}{\partial \theta_{\rm d}}, \frac{\partial \boldsymbol{a}(\theta_{\rm s})}{\partial \theta_{\rm s}}\right\} \tag{34}$$

其中，span(·)表示由若干向量张成的线性空间。

推论2 $\mathcal{U}$中的4个向量均满足引理1或推论1的条件，因而张成空间$\mathcal{U}$包含于Range($\boldsymbol{T}$)，因此对任意$\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$，有

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u} \tag{35}$$

即波束形成在$\mathcal{U}$上等价于恒等映射。

命题1 设阵元空间中接收信号的协方差矩阵$\boldsymbol{R}$及其关于未知参数η_i的偏导数分别如式(5)和式(11)所示。若$\mathcal{U}\subseteq\mathrm{Range}(\boldsymbol{T})$，则波束空间中的协方差矩阵及其关于未知参数$\eta_i$的偏导数分别为

$$\boldsymbol{R}_B=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{T} \tag{36}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{R}_B}{\partial\eta_i}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{T} \tag{37}$$

进而有

$$\mathrm{CRB}_B\left(\theta_{\mathrm{d}}\right)=\mathrm{CRB}_E\left(\theta_{\mathrm{d}}\right) \tag{38}$$

证明：取酉矩阵$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}_{\perp}]\in\mathbb{C}^{M\times M}$，则$\boldsymbol{R}$和$\dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}$在基底$\boldsymbol{U}$下可分块表示为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_B & 0\\ 0 & \sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M-B}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{39}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{R}_B}{\partial\eta_i} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{40}$$

由块对角结构可得

$$\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_B^{-1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sigma_n^2}\boldsymbol{I}_{M-B}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{41}$$

则

$$\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_B^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{R}_B}{\partial\eta_i} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{42}$$

进一步可得

$$\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_j}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_B^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{R}_B}{\partial\eta_i}\boldsymbol{R}_B^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{R}_B}{\partial\eta_j} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{43}$$

将式(43)代入式(10)，并利用迹运算的循环不变性$\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})$，可得

$$F_{\eta_i\eta_j}^{E}=L\cdot\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{R}_B^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}_B}{\partial\eta_i}\boldsymbol{R}_B^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}_B}{\partial\eta_j}\right) \tag{44}$$

因此$F_{\eta_i\eta_j}^{E}=F_{\eta_i\eta_j}^{B}$，从而得到

$$\mathrm{CRB}_B\left(\theta_{\mathrm{d}}\right)=\mathrm{CRB}_E\left(\theta_{\mathrm{d}}\right) \tag{45}$$

证毕。

为保证在压缩接收数据维度的同时不降低仰角目标的DOA估计精度，本节推导了波束空间与阵元空间CRB相等的充分条件。结果表明，当波束形成器在低仰角观测区域Θ内满足

$$g(\varphi)=1,\forall\varphi\in\Theta \tag{46}$$

则波束空间与阵元空间的Fisher信息矩阵完全一致，因而两者CRB相等。然而在实际应用中往往难以严格满足式(46)中的条件，通常仅能达到近似要求：

$$g(\varphi)\approx1,\forall\varphi\in\Theta \tag{47}$$

此时可定义最大投影误差为

$$\varepsilon=\sup_{\varphi\in\Theta}\left|\left|\left(\boldsymbol{I}_M-\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\right)\boldsymbol{c}(\varphi)\right|\right| \tag{48}$$

则阵元空间与波束空间的CRB差异满足：

$$\left|\mathrm{CRB}_B\left(\theta_{\mathrm{d}}\right)-\mathrm{CRB}_E\left(\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|=o(\varepsilon),\varepsilon\to0,\ \text{当}g(\varphi)\to1,\forall\varphi\in\Theta \tag{49}$$

其中，$o(\varepsilon)$表示当$\varepsilon\to0$时的高阶无穷小。

综上，为确保在压缩接收数据维度的同时保持较高的仰角估计精度，所设计的波束形成器$\boldsymbol{T}$需同时满足以下两个条件：(1)满足半酉约束：$\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_B$；(2)在整个低仰角观测区域$\Theta$内，增益满足$g(\varphi)\approx1,\forall\varphi\in\Theta$。上述条件为后续波束形成器的设计提供了理论依据，可在降低处理数据维度的同时，使波束空间方法的估计性能逼近阵元空间的CRB。第4节将基于该条件提出一种适用于低仰角目标DOA估计的波束形成器设计方法。

4 基于波束空间的低仰角目标DOA估计方法

本节在3.3节理论分析的基础上，提出了一种基于波束空间的低仰角目标DOA估计方法。该方法主要包括两个步骤。首先，将低仰角观测区域内的期望波束形成器增益作为约束条件，通过最小化所需波束数量设计波束形成器，以实现接收数据从阵元空间到低维波束空间的近似无损映射。其次，基于最大似然准则构建关于目标仰角与多径到达角的联合估计代价函数，并利用二者之间的几何关系，将原二维参数优化问题转化为一维优化问题，从而在较低计算复杂度下实现对目标仰角的精确估计。

4.1 波束形成器设计

当阵元数较多时，传统角度搜索方法的计算复杂度显著增加，难以满足工程应用中的实时处理需求。为此，本文首先对接收数据进行波束空间预处理，将其从M维阵元空间映射至低维波束空间。为

避免映射过程引起DOA估计精度下降，本节依据3.3节推导的阵元空间与波束空间CRB相等的近似充分条件，提出一种波束形成器设计方法，从而在映射过程中尽可能完整地保留目标及多径信息。

波束形成器定义为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{M}}\left[\boldsymbol{a}(\theta_1),\boldsymbol{a}(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\theta_b),\cdots,\boldsymbol{a}(\theta_B)\right]\in\mathbb{C}^{M\times B} \tag{50}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}_B=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_b,\cdots,\theta_B]$表示所选波束指向角的集合，$B$为构建波束形成器所需的波束个数。$\boldsymbol{a}(\theta_b)$表示为

$$\boldsymbol{a}(\theta_b)=\left[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d\sin(\theta_b)/\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(M-1)d\sin(\theta_b)/\lambda}\right]^{\mathrm{T}} \tag{51}$$

在阵元数M已知的情况下，接收阵列主波束内的低仰角观测区域可表示为

$$\Theta=\left[-\frac{\theta_{\mathrm{BW}}}{2},\frac{\theta_{\mathrm{BW}}}{2}\right] \tag{52}$$

其中，θ_{BW}为接收阵列的主瓣波束宽度，其计算公式为

$$\theta_{\mathrm{BW}}=2\arcsin\left(\frac{\lambda}{Md}+\sin(\overline{\theta})\right) \tag{53}$$

其中，$\overline{\theta}$为波束指向角。由于目标仰角和多径到达角均位于以0°为指向角的主波束内部，因此本文设定 $\overline{\theta}=0^\circ$。

为实现接收数据降维的同时尽可能保持低仰角目标的DOA估计精度，本文提出了一种波束形成器设计方法。该方法要求波束形成器满足以下两个关键条件：(1) 波束形成器$\boldsymbol{T}$需满足半酉约束$\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_B$；（2）$\boldsymbol{T}$在低仰角观测区域$\Theta$内的增益满足$g(\varphi)\approx 1,\forall\varphi\in\Theta$。因此，波束形成器$\boldsymbol{T}$的设计可表述为以下约束优化问题：

$$\begin{aligned}&\min B\\&\text{s.t. } g(\varphi)\geq\gamma,\forall\varphi\in\Theta,\\&\qquad\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_B,0<\gamma<1\end{aligned} \tag{54}$$

其中，γ为最小增益阈值。当$\gamma\approx 1$时，表明在低仰角观测区域Θ内，阵元空间数据可以在保持目标仰角估计精度的前提下，近似无损地映射至低维波束空间。

由于式(54)中的优化问题属于高维非凸问题，难以直接求解。为此，本文将波束形成器设计进一步转化为稀疏波束选择问题。首先，在一组预定义的候选角度网格$\overline{\boldsymbol{\theta}}=\left[\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2,\cdots,\overline{\theta}_n,\cdots,\overline{\theta}_N\right]\subset\Theta$上构造完备导向矢量字典矩阵：

$$\boldsymbol{Q}=\left[\frac{\boldsymbol{a}(\overline{\theta}_1)}{\sqrt{M}},\frac{\boldsymbol{a}(\overline{\theta}_2)}{\sqrt{M}},\cdots,\frac{\boldsymbol{a}(\overline{\theta}_n)}{\sqrt{M}},\cdots,\frac{\boldsymbol{a}(\overline{\theta}_N)}{\sqrt{M}}\right]\in\mathbb{C}^{M\times N} \tag{55}$$

我们的目标是从字典矩阵$\boldsymbol{Q}$中选取尽可能少的列向量以构建波束形成器，使其在所有测试角度$\varphi\in\Theta$下的增益满足给定约束。设被选中的角度集合为$\boldsymbol{w}\subseteq\overline{\boldsymbol{\theta}}$，则相应的稀疏优化问题可表述为

$$\begin{aligned}&\min\|\boldsymbol{w}\|_0\\&\text{s.t } g(\varphi_k)\geq\gamma,\ \forall\varphi_k\in\boldsymbol{\Phi}\\&\qquad\boldsymbol{T}=\mathrm{orth}\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{w}}\right)\end{aligned} \tag{56}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k,\cdots,\varphi_K]\subset\Theta$表示低仰角观测区域内的测试角度集合，$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{w}}$为字典中对应角度集合$\boldsymbol{w}$的子矩阵，$\mathrm{orth}(\cdot)$表示对矩阵列向量进行单位正交化处理。

需要指出的是，式(56)可视为式(54)在离散角度网格上的稀疏化等价形式。两式在优化目标上保持一致：式(54)中最小化波束个数B的目标在式(56)中通过最小化选中角度集合$\boldsymbol{w}$中的非零元素个数(即$\|\boldsymbol{w}\|_0$)来实现。由于选中角度集合中的角度个数与生成波束个数一一对应，式(56)在物理意义上与式(54)等价，并且该离散稀疏化形式更便于利用稀疏恢复方法进行高效求解。

由于式(56)为NP-hard的组合稀疏优化问题，本文采用贪婪迭代算法进行求解，具体实现步骤如下。

输入： 测试角度集$\boldsymbol{\Phi}=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k,\cdots,\varphi_K]$，导向矢量字典矩阵$\boldsymbol{Q}$，最小增益阈值$\gamma$；

初始化： 已选角度集合$\boldsymbol{w}^{(0)}=\varnothing$，波束形成器$\boldsymbol{T}^{(0)}=[\,]$，迭代计数$q=1$；

重复以下步骤，直至所有测试角度满足波束形成器的增益约束：

步骤1　在第q次迭代时，对每个尚未被选中的角度$\overline{\theta}_h\in\overline{\boldsymbol{\theta}}/\boldsymbol{w}^{(q-1)}=\left[\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2,\cdots,\overline{\theta}_h,\cdots,\overline{\theta}_H\right]$构造对应的临时候选角度集合：

$$\boldsymbol{w}_h^{(q)}=\boldsymbol{w}^{(q-1)}\cup\left\{\overline{\theta}_h\right\},h=1,2,\cdots,H \tag{57}$$

步骤2　基于$\boldsymbol{w}_h^{(q)}$构造对应的波束形成矩阵：

$$\boldsymbol{T}_h^{(q)}=\mathrm{orth}\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{w}_h^{(q)}}\right) \tag{58}$$

步骤3　对每个测试角度$\varphi_k\in\boldsymbol{\Phi}$，计算对应波束形成器增益：

$$g_k^h=\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}(\varphi_k)\boldsymbol{T}_h^{(q)}\left(\boldsymbol{T}_h^{(q)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{c}(\varphi_k)}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}(\varphi_k)\boldsymbol{c}(\varphi_k)},k=1,2,\cdots,K \tag{59}$$

进而得到波束增益向量$\boldsymbol{g}^h=\left[g_1^h,g_2^h,\cdots,g_k^h,\cdots,g_K^h\right]^{\mathrm{T}}$，并取其最小值作为该候选角度集的评价指标：

$$r_h=\min\boldsymbol{g}^h \tag{60}$$

步骤4　从所有候选角度集合$\boldsymbol{w}_h^{(q)}=\boldsymbol{w}^{(q-1)}\cup\left\{\overline{\theta}_h\right\}$，

$h=1,2,\cdots,H$中选取最小增益最大的角度作为当前迭代的最优选择：

$$\hat{\theta}^{(q)}=\arg\max_{\overline{\theta}_h}\boldsymbol{r} \tag{61}$$

其中，$\boldsymbol{r}=[r_1,r_2,\cdots,r_h,\cdots,r_H]^{\mathrm{T}}$表示$H$个候选角度对应的最小波束增益向量。

步骤5　更新已选角度集合与对应的波束形成矩阵：

$$\boldsymbol{w}^{(q)}\leftarrow\boldsymbol{w}^{(q-1)}\cup\left\{\hat{\theta}^{(q)}\right\} \tag{62}$$

$$\boldsymbol{T}^{(q)}=\mathrm{orth}\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{w}^{(q)}}\right) \tag{63}$$

步骤6　判断$\boldsymbol{T}^{(q)}$是否在所有测试角度上满足增益约束。若对于任意$\varphi_k\in\boldsymbol{\Phi}$均有

$$g(\varphi_k)=\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}(\varphi_k)\boldsymbol{T}^{(q)}\left(\boldsymbol{T}^{(q)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{c}(\varphi_k)}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}(\varphi_k)\boldsymbol{c}(\varphi_k)}\geq\gamma \tag{64}$$

则终止迭代；否则$q=q+1$，进入下一次迭代。

输出：在所有测试角度上满足增益约束的波束形成矩阵$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{(q)}$。

值得注意的是，波束形成器$\boldsymbol{T}$可在离线阶段预先设计，因此不会对后续算法的实时性造成影响。引入设计完成的波束形成器后，接收数据$\boldsymbol{X}$可从阵元空间映射至低维波束空间，其具体变换形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_B&=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}\\&=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}[1,\overline{\rho}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N}\\&=\boldsymbol{A}_B[1,\overline{\rho}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{N}_B\end{aligned} \tag{65}$$

其中，$\boldsymbol{X}_B=[\boldsymbol{x}_B(1),\boldsymbol{x}_B(2),\cdots,\boldsymbol{x}_B(l),\cdots,\boldsymbol{x}_B(L)]\in\mathbb{C}^{B\times L}$表示波束空间中的接收数据，$\boldsymbol{A}_B=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_{\mathrm{d}}),\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_{\mathrm{s}})\right]$为波束空间中的导向矢量矩阵，$\boldsymbol{N}_B=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N}$为波束空间中的噪声矩阵。由此可见，所设计的波束形成器能够在最大限度保留接收数据中有效目标信息的同时，实现对高维阵元空间数据的降维，从而显著降低低仰角目标DOA估计的计算复杂度。

4.2 基于波束空间的降维ML算法

波束空间中的接收数据$\boldsymbol{X}_B$可重写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_B&=[\boldsymbol{x}_B(1),\boldsymbol{x}_B(2),\cdots,\boldsymbol{x}_B(l),\cdots,\boldsymbol{x}_B(L)]\\&=\boldsymbol{A}_B\overline{\boldsymbol{S}}+\boldsymbol{N}_B\end{aligned} \tag{66}$$

其中，$\overline{\boldsymbol{S}}=\left[\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}},\overline{\rho}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}=[\overline{\boldsymbol{s}}(1),\overline{\boldsymbol{s}}(2),\cdots,\overline{\boldsymbol{s}}(l),\cdots,\overline{\boldsymbol{s}}(L)]\in\mathbb{C}^{2\times L}$为信号矩阵，包含直接路径信号和镜面反射路径信号，$\boldsymbol{N}_B=\left[\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(1),\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(2),\cdots,\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(l),\cdots,\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(L)\right]$。

由于$\boldsymbol{n}(l)\in\mathbb{C}^{M\times1}$为加性高斯白噪声，其均值和方差分别为0和$\sigma_n^2$，且$\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_B$。因此，阵元空间数据映射至波束空间后噪声的统计特性保持不变。即波束空间中的噪声项$\boldsymbol{n}_B(l)=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(l)\in\mathbb{C}^{B\times1}$仍服从均值为0，方差为$\sigma_n^2$的复高斯分布。因此，波束空间接收数据$\boldsymbol{X}_B$的概率密度函数为

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{X}_B\left|\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}},\overline{\boldsymbol{S}},\sigma_n^2\right.)=&\prod_{l=1}^{L}\frac{1}{(\pi\sigma_n^2)^B}\\&\cdot\exp\left(-\frac{||\boldsymbol{x}_B(l)-\boldsymbol{A}_B\overline{\boldsymbol{s}}(l)||^2}{\sigma_n^2}\right)\end{aligned} \tag{67}$$

其中，$||\cdot||$表示向量的欧几里得范数。

对式(67)取对数并去除与待估计参数无关的常数项，可得

$$\begin{aligned}&\ln f(\boldsymbol{X}_B\left|\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}},\overline{\boldsymbol{S}},\sigma_n^2\right.)\\&=-BL\ln\sigma_n^2-\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{l=1}^{L}||\boldsymbol{x}_B(l)-\boldsymbol{A}_B\overline{\boldsymbol{s}}(l)||^2\end{aligned} \tag{68}$$

其中，$\ln f(\boldsymbol{X}_B\left|\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}},\overline{\boldsymbol{S}},\sigma_n^2\right.)$是关于未知参数$\theta_{\mathrm{d}}$，$\theta_{\mathrm{s}}$，$\overline{\boldsymbol{S}},\sigma_n^2$的函数。在式(68)中对$\sigma_n^2$求偏导并令其为零，可得到$\sigma_n^2$的最大似然估计为

$$\hat{\sigma}_n^2=\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}||\boldsymbol{x}_B(l)-\boldsymbol{A}_B\overline{\boldsymbol{s}}(l)||^2 \tag{69}$$

将式(69)代入式(68)，并省略与估计参数无关的常数项，可得

$$\begin{aligned}&\ln f(\boldsymbol{X}_B\left|\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}},\overline{\boldsymbol{S}},\sigma_n^2\right.)\\&=-BL\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}||\boldsymbol{x}_B(l)-\boldsymbol{A}_B\overline{\boldsymbol{s}}(l)||^2\right)\end{aligned} \tag{70}$$

根据式(70)，可得$\overline{\boldsymbol{s}}(l)$的最小二乘解为

$$\overline{\boldsymbol{s}}(l)=\left[\boldsymbol{A}_B^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_B\right]^{-1}\boldsymbol{A}_B^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}_B(l),l=1,2,\cdots,L \tag{71}$$

将式(71)代入式(70)，可得

$$\begin{aligned}&\ln f(\boldsymbol{X}_B\left|\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}},\overline{\boldsymbol{S}},\sigma_n^2\right.)\\&=-BL\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}||\boldsymbol{x}_B(l)-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}\boldsymbol{x}_B(l)||^2\right)\end{aligned} \tag{72}$$

其中，$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}$表示由矩阵$\boldsymbol{A}_B$构成的空间投影矩阵，可以表示为

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}=\boldsymbol{A}_B\left[\boldsymbol{A}_B^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_B\right]^{-1}\boldsymbol{A}_B^{\mathrm{H}} \tag{73}$$

其中，$\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}||\boldsymbol{x}_B(l)-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}\boldsymbol{x}_B(l)||^2\right)$可进一步化简为

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}||\boldsymbol{x}_B(l)-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}\boldsymbol{x}_B(l)||^2\right)\\
&=\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}||(\boldsymbol{I}_B-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B})\,\boldsymbol{x}_B(l)||^2\right)\\
&=\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}\left|\left|\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\boldsymbol{x}_B(l)\right|\right|^2\right)\\
&=\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{H}}(l)\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\boldsymbol{x}_B(l)\right)\\
&=\ln\left(\frac{1}{BL}\sum_{l=1}^{L}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\boldsymbol{x}_B(l)\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{H}}(l)\right]\right)\\
&=\ln\left(\frac{1}{B}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\sum_{\mathrm{l}=1}^{L}\frac{1}{L}\boldsymbol{x}_B(l)\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{H}}(l)\right]\right)\\
&=\ln\left(\frac{1}{B}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\hat{\boldsymbol{R}}_B\right]\right)
\end{aligned}\tag{74}$$

其中，

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}=\boldsymbol{I}_B-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}\tag{75}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_B=\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{L}\boldsymbol{x}_B(l)\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{H}}(l)\tag{76}$$

将式(74)代入式(72)，可得

$$\ln f(\boldsymbol{X}_B\,|\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}},\overline{\boldsymbol{S}},\sigma_n^2)=-BL\ln\left(\frac{1}{B}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\hat{\boldsymbol{R}}_B\right]\right)\tag{77}$$

低仰角目标DOA估计的代价函数Q可定义为

$$Q(\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}})=\left[-BL\ln\left(\frac{1}{B}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\hat{\boldsymbol{R}}_B\right]\right)\right]\tag{78}$$

目标仰角θ_{d}和多径到达角θ_{s}的估计可通过求解如下优化问题获得

$$\begin{aligned}
(\hat{\theta}_{\mathrm{d}},\hat{\theta}_{\mathrm{s}})&=\underset{\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}}}{\arg\max}\,Q(\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}})\\
&=\underset{\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}}}{\arg\max}\left[-BL\ln\left(\frac{1}{B}\mathrm{tr}\left[\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}_B}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}_B\right]\right)\right]\\
&=\underset{\theta_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{s}}}{\arg\min}\,\mathrm{tr}\left[\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}_B}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}_B\right]
\end{aligned}\tag{79}$$

式(79)涉及目标仰角与多径到达角的二维联合优化，计算复杂度较高，难以满足实时处理要求。为降低优化问题的计算复杂度，本文利用平面多径模型中目标仰角与多径到达角之间的几何关系作为先验信息，对代价函数Q进行降维处理，从而将式(79)中涉及的二维参数联合优化问题转化为仅关于目标仰角的一维参数优化问题。

由式(8)可知，多径到达角θ_{s}可由目标仰角θ_{d}表示。将式(8)代入式(79)，则目标仰角θ_{d}的估计可通过求解如下优化问题获得

$$\hat{\theta}_{\mathrm{d}}=\underset{\theta_{\mathrm{d}}}{\arg\min}\,\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}\hat{\boldsymbol{R}}_B\right]\tag{80}$$

此时，代价函数Q被化简为仅关于目标仰角θ_{d}的函数，最后通过求解式(79)即可获得目标仰角θ_{d}的最大似然估计。

综上所述，基于波束空间的低仰角目标DOA估计方法可总结为以下步骤：

步骤1　根据4.1节中提出的方法构建波束形成器$\boldsymbol{T}$；

步骤2　根据式(65)将阵元空间的接收数据$\boldsymbol{X}$映射至低维波束空间，得到$\boldsymbol{X}_B$；

步骤3　根据式(76)计算波束空间中的采样协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_B$；

步骤4　设置目标仰角的搜索范围，根据式(8)将$\boldsymbol{A}_B=\left[\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_{\mathrm{d}}),\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_{\mathrm{s}})\right]$中的$\theta_{\mathrm{s}}$用$\theta_{\mathrm{d}}$代替；

步骤5　根据式(73)和式(75)构建正交空间投影矩阵$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_B}^{\perp}$；

步骤6　求解式(80)来获得目标仰角的最大似然估计值$\hat{\theta}_{\mathrm{d}}$。

需要强调的是，与现有的低仰角目标DOA估计算法类似，本文所提方法仅适用于单目标场景。在实际处理过程中，通常首先通过距离-速度平面上的目标检测，将多目标场景分解为若干单目标子问题。依据目标的距离和速度信息可以有效区分不同目标的回波单元，从而提取各独立目标的有效回波信号用于后续的目标仰角估计。然而，如果在同一距离单元和多普勒通道内存在多个目标时，本文方法将由于信号模型失配而失效。针对该问题的解决方案将作为下一步研究的重要方向。

5　仿真实验与实测数据处理结果

5.1　仿真实验

本节通过一系列仿真实验，对本文方法在目标仰角估计精度、运行效率及稳健性方面的性能进行了评估。除特别说明外，本节所有仿真实验均采用统一的参数设置：雷达接收阵列为16阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，载频为$f_{\mathrm{c}}=1.5$ GHz。目标与雷达之间的直接路径距离为$R_{\mathrm{d}}=3000$ m，间接路径距离为$R_{\mathrm{s}}=[2h_{\mathrm{a}}+R_{\mathrm{d}}\sin(\theta_{\mathrm{d}})]\,/\,\sin(-\theta_{\mathrm{s}})$。接收阵列中心高度为$h_{\mathrm{a}}=3$ m，目标仰角θ_{d}与多径到达角θ_{s}分别为2.43°和–2.54°，镜面反射系数为$\rho=0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$，波束形成器的增益阈值设为$\gamma=0.99$。为全面评估本文方法的性能，本文将其与波束空间的3D-BML算法[33]、RML-SDB算法[34]以及阵元空间的RML算法[26]、AP-Newton算法[28]进行了对比，并以第3节推导的低仰角目标DOA估计的CRB作为理论性能基准。仿真中的信噪比定义如下：

$$\mathrm{SNR}=10\lg\frac{\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\|_{\mathrm{F}}^{2}}{\|\boldsymbol{N}\|_{\mathrm{F}}^{2}}\ \mathrm{dB} \tag{81}$$

其中，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$表示Frobenius范数，$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{N}$为式(4)中的接收信号和噪声矩阵。此外，本实验采用均方根误差(Root Mean Square Errors, RMSE)来评估各算法的仰角估计精度，其定义如下：

$$\mathrm{RMSE}_{\theta_{\mathrm{d}}}=\sqrt{\frac{1}{Z}\sum_{z=1}^{Z}\left(\theta_{\mathrm{d}}-\hat{\theta}_{\mathrm{d},z}\right)^{2}} \tag{82}$$

其中，Z表示蒙特卡罗实验次数，实验中设置$Z=5000$。$\hat{\theta}_{\mathrm{d},z}$为第$z$次蒙特卡罗实验中对$\theta_{\mathrm{d}}$的估计结果。所有仿真实验均在一台配备Intel酷睿i7-12700F 2.1 GHz CPU和32 GB RAM的PC机上，使用MATLAB R2022b软件完成。

在第1个仿真实验中，对不同算法构造的波束形成器在低仰角观测区域内的增益性能进行了评估。3种波束空间算法的波束指向角集合列于表1，其中本文方法的波束指向角集合依据4.1节提出的方法确定；3D-BML和RML-SDB算法的波束指向角分别依据文献[33]和文献[34]的设计方式确定。具体而言，3D-BML算法的波束指向角集合为$\boldsymbol{\theta}_B=[-\theta_D,0^\circ,\theta_D]$，RML-SDB算法的波束指向角集合为$\boldsymbol{\theta}_B=[-\theta_D,\theta_D]$，其中，$\theta_D$与阵元数$M$有关，其定义为$\theta_D=\arcsin\left(\frac{\lambda}{dM}\right)$。仿真中测试角度范围设为$-15^\circ\sim15^\circ$，步长为$0.1^\circ$。图2给出了3种波束空间算法波束形成器在测试角度范围内的增益分布曲线，其中θ_B表示接收阵列的主瓣波束宽度。由图2可见，在整个低仰角观测区域$\boldsymbol{\Theta}=[-\theta_{\mathrm{BW}}/2,\theta_{\mathrm{BW}}/2]$内，3D-BML算法与RML-SDB算法构造的波束形成器仅在少数角度处的增益接近1，而在大多数测试角度上显著低于1。这说明两种算法在由阵元空间映射至波束空间的过程中存在信息损失。相比之下，本文方法在整个低仰角观测区域内均保持接近1的增益水平，表明所设计的波束形成器在实现数据降维的同时能够最大限度保留接收数据中的有效目标信息，从而实现近似无损的空间映射。这一特性为在波束空间中进一步开展高精度目标仰角估计提供了有力支撑。

表 1 不同波束空间DOA估计算法波束形成器的波束指向角设置

Tab. 1 Beam steering angle configurations of beamformers in different beamspace DOA estimation algorithms

算法	波束指向角集合
3D-BML	$\boldsymbol{\theta}_B=[-7.18^\circ,0^\circ,7.18^\circ]$
RML-SDB	$\boldsymbol{\theta}_B=[-7.18^\circ,7.18^\circ]$
本文方法	$\boldsymbol{\theta}_B=[-6.73^\circ,-5.41^\circ,-2.08^\circ,5.06^\circ,5.78^\circ]$

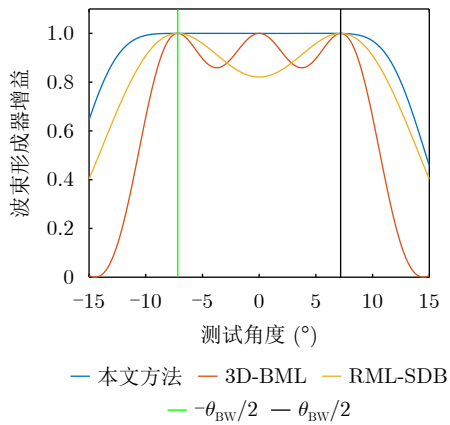

图 2 不同算法波束形成器增益随测试角度的变化

Fig. 2 Beamformer gain versus test angle for different algorithms

在仿真实验2中评估了本文方法在不同目标仰角条件下的估计性能。仿真参数设定为：信噪比5 dB，快拍数50，目标仰角范围为$1^\circ\sim7^\circ$。图3给出了不同算法的目标仰角估计RMSE随仰角变化的趋势。随着目标仰角的增加，各算法的RMSE整体呈下降趋势，但在部分角度区间仍存在一定波动。这主要是由于目标仰角变化会导致多径衰减系数的相位呈周期性变化，进而影响仰角估计精度。另外，目标仰角增大时，其与多径到达角之间的角度间隔逐渐变大，有利于区分直达路径信号与多径分量，从而提高仰角估计精度。与3D-BML和RML-SDB算法相比，本文方法在整个观测区间内均保持了更高的估计精度。该算法实现了接收数据由阵元空间到波束空间的近似无损映射，有效保留了接收数据中的目标信息，因此其性能与阵元空间的RML算法相当。此外，本文方法的CRB接近于阵元空间的理论CRB，进一步验证了其在目标信息保留方面的有效性。

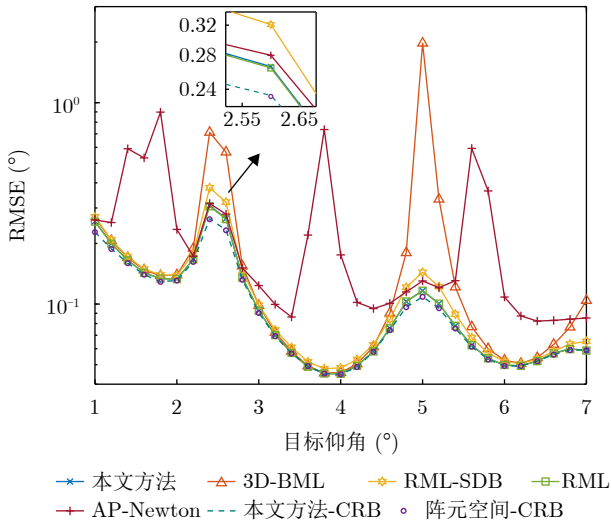

图 3 目标仰角估计的RMSE随目标仰角的变化

Fig. 3 RMSE of target elevation angle estimation versus target elevation angle

在第3组仿真实验中，评估了本文方法在不同信噪比条件下的目标仰角估计性能。仿真设定信噪比范围为$[-10\ \mathrm{dB}, 20\ \mathrm{dB}]$，快拍数为 50。图4给出了各算法在不同信噪比条件下目标仰角估计的RMSE。由实验结果可见，在两种阵元空间算法中，RML算法利用了平面多径模型中目标仰角与多径到达角之间的几何约束作为先验信息，因此其仰角估计精度略优于AP-Newton算法。此外，本文方法在各信噪比条件下的估计精度均优于3D-BML算法和RML-SDB算法，其性能仍与阵元空间的RML算法保持一致。这主要得益于本文方法在将接收数据由阵元空间映射至低维波束空间的过程中，能够最大限度保留接收数据中的有效目标信息。图5给出了不同算法的目标仰角估计CRB随信噪比的变化曲线。可以看出，本文方法的CRB更接近阵元空间中的理论CRB，进一步验证了该方法在近似无损映射方面的有效性。

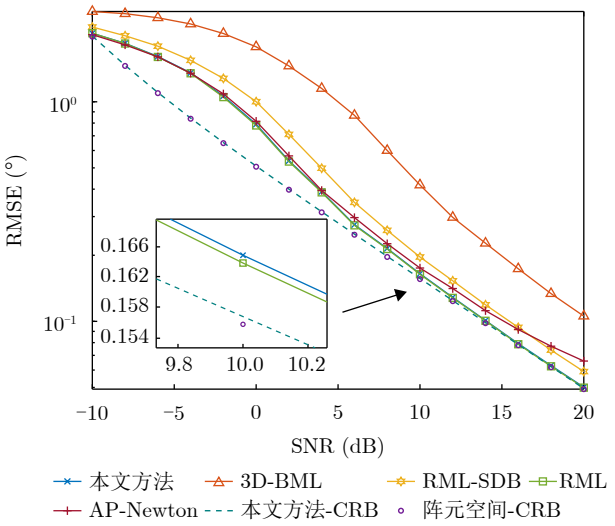

图 4 目标仰角估计的RMSE随信噪比的变化

Fig. 4 RMSE of target elevation angle estimation versus SNR

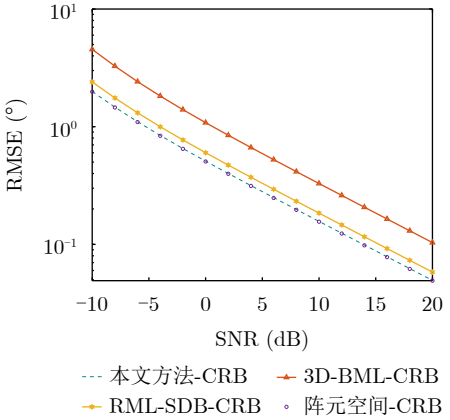

图 5 不同算法的目标仰角估计CRB随信噪比的变化

Fig. 5 CRB of target elevation angle estimation versus SNR for different algorithms

在第4组仿真实验中，评估了本文方法在不同快拍数条件下的目标仰角估计性能。仿真设定信噪比为5 dB，快拍数从10增加至100，步长为10。图6给出了各算法在不同快拍数下的RMSE对比结果。在整个快拍数范围内，3D-BML算法与RML-SDB算法的仰角估计精度显著低于本文方法。这一结果与仿真实验3中的分析一致，表明这两种对比算法在将接收数据从阵元空间映射至波束空间的过程中丢失了部分目标信息。相比之下，本文方法在映射过程中保留了接收数据中的有效目标信息，因此在不同快拍数条件下均表现出更高的仰角估计精度。此外，本文方法的RMSE与阵元空间的RML算法基本一致。与3D-BML算法、RML-SDB算法与AP-Newton算法相比，本文方法的RMSE整体更接近阵元空间的理论CRB，进一步验证了其在低仰角目标DOA估计中的有效性与鲁棒性。

仿真实验5用于分析波束形成器增益阈值γ对本文方法目标仰角估计精度的影响。仿真参数设定为：信噪比5 dB，快拍数50，增益阈值γ分别设为0.9, 0.99, 0.999和0.9999。图7给出了在不同γ取值下，本文方法的目标仰角估计RMSE随仰角变化的曲线。从图7可以看出，当$\gamma \geq 0.99$时，RMSE整体保持稳定，说明将γ设为0.99即可实现较高的仰角估计精度。图8进一步展示了在不同γ取值下，目标仰角估计CRB随仰角的变化情况。结果表明，当$\gamma \geq 0.99$时，本文方法构造的波束形成器能够近似无损地将阵元空间数据映射至低维波束空间，从而有效提升目标仰角的估计精度。

仿真实验6用于评估镜面反射系数ρ的幅度对各

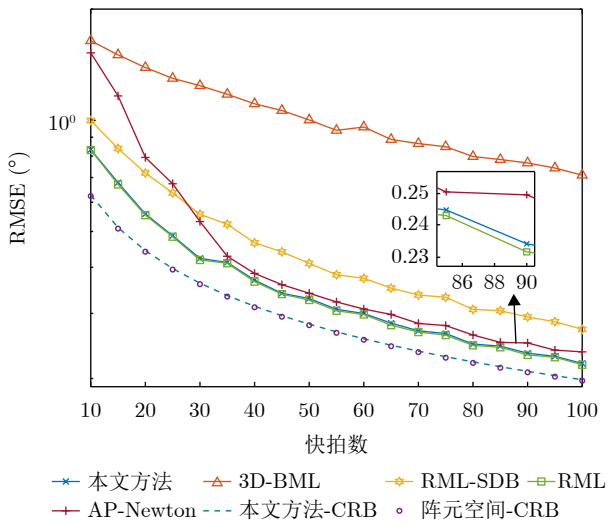

图 6 目标仰角估计的RMSE随快拍数的变化

Fig. 6 RMSE of target elevation angle estimation versus number of snapshots

算法目标仰角估计精度的影响。仿真参数设置如下：信噪比为5 dB，快拍数为50，$|\rho|$从0.1增加至1.0，步长为0.1。图9给出了各算法在不同$|\rho|$条件下的目标仰角估计RMSE。可以看出，随着$|\rho|$的增大，各算法目标仰角估计的RMSE整体呈上升趋势。这是因为$|\rho|$越大表明目标回波中多径信号所占比重越高，从而使直达路径信号受到更强的多径干扰，最终导致目标仰角估计精度下降。尽管如此，本文方法的性能仍优于3D-BML, RML-SDB和AP-Newton 3种算法，且与阵元空间的RML算法性能接近。

仿真实验7用于评估接收阵元数对各算法目标仰角估计精度的影响。仿真参数设置如下：信噪比为5 dB，快拍数为50，接收阵列为均匀线阵，阵元数从10增加至40，步长为2。图10给出了各算法在不同阵元数下的目标仰角估计RMSE。实验结果表明，随着阵元数的增加，各算法目标仰角估计的RMSE整体呈下降趋势。这主要归因于阵元数增加提升了阵列在俯仰方向的有效孔径，从而提高了仰角估计精度。在整个阵元数变化范围内，本文方法的性能始终优于3D-BML算法、RML-SDB算法和AP-Newton算法，且与阵元空间的RML算法性能接近。此外，本文方法的CRB与阵元空间中的理论CRB保持高度一致，进一步验证了该方法在将接收数据从阵元空间映射至低维波束空间过程中有效保留了目标信息，因此不会显著降低仰角估计精度。

仿真实验8用于评估本文方法在不同接收阵元

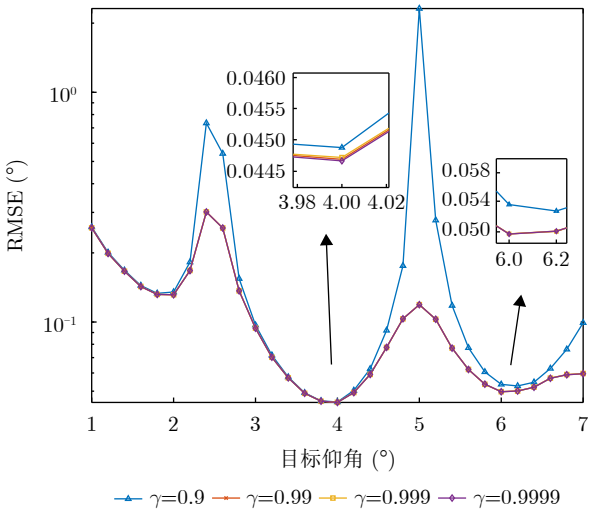

图 7 不同γ下目标仰角估计的RMSE随目标仰角的变化

Fig. 7 RMSE of target elevation angle estimation versus target elevation angle for different γ

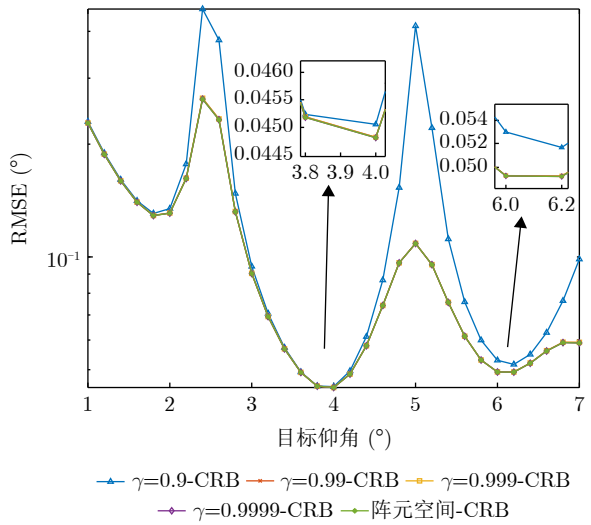

图 8 不同γ下目标仰角估计的CRB随目标仰角的变化

Fig. 8 CRB of target elevation angle estimation versus target elevation angle for different γ

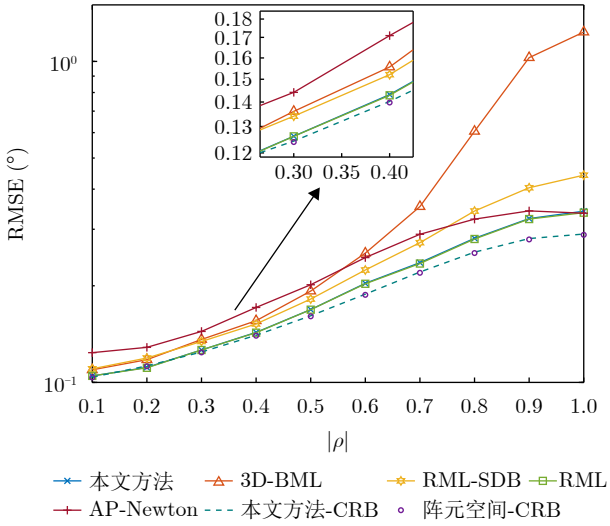

图 9 目标仰角估计的RMSE随$|\rho|$的变化

Fig. 9 RMSE of target elevation angle estimation versus $|\rho|$

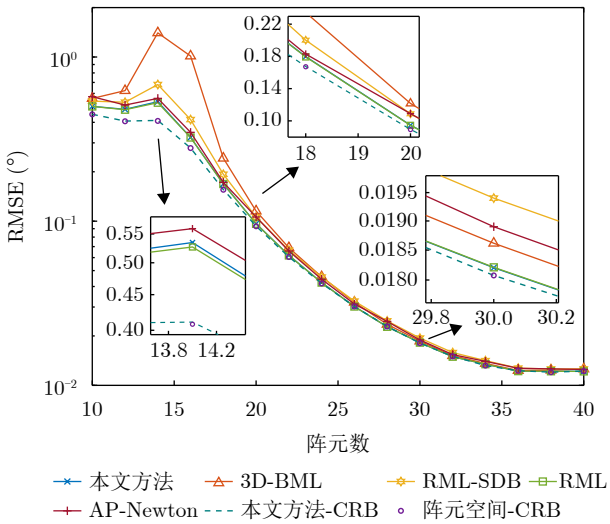

图 10 目标仰角估计的RMSE随阵元数的变化

Fig. 10 RMSE of target elevation angle estimation versus number of array elements

数条件下的运行效率。仿真参数设定为：信噪比为5 dB，快拍数为50，接收阵列的阵元数从10增加至40。图11给出了在5000次蒙特卡罗实验下，不同阵元数条件下各算法的平均单次运行时间。实验结果表明，随着阵元数增加，RML算法和AP-Newton算法的运行时间显著增加。这是由于其在阵元空间中处理的数据维度随阵元数线性增长，导致计算复杂度显著增加。相比之下，本文方法、3D-BML算法和RML-SDB算法均在低维波束空间中处理数据，可有效降低计算复杂度，因此运行时间随阵元数变化不显著。此外，结合图10与图11的结果可知，本文方法在保持目标仰角估计精度的同时显著提升了运行效率，展现出更优的综合性能。

表2对本文方法、3D-BML算法、RML-SDB算法、AP-Newton算法以及RML算法的计算复杂度进行了对比分析。除RML算法和AP-Newton算法外，其余3种算法的计算复杂度均分为离线阶段和在线阶段两部分：其中，离线阶段的计算复杂度主要包括波束形成器的设计；在线阶段的计算复杂度则对应算法在实时处理过程中的运算开销。表2中，B_{3D}，B_{SDB}和B_{PM}分别表示3D-BML算法、RML-SDB算法和本文方法在构建波束形成器时所需的波束数，$\overline{Q}$表示各算法角度搜索网格中的采样点数，I_{AP}表示AP-Newton算法中的迭代次数，N和K分别表示本文方法在波束形成器设计中采用的候选角度集合点数与验证角度集合点数。

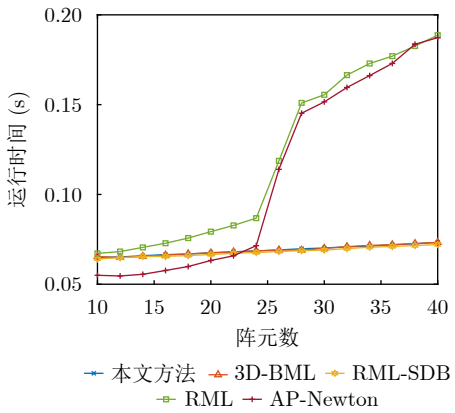

图 11 不同算法平均运行时间随阵元数的变化

Fig. 11 Average runtime versus number of array elements for different algorithms

表 2　不同算法的计算复杂度

Tab. 2　Computational complexity of different algorithms

算法	在线计算复杂度	离线计算复杂度
3D-BML	$O\left(\overline{Q}B_{3D}M+\overline{Q}(B_{3D})^3\right)$	$O\left(B_{3D}ML\right)$
RML-SDB	$O\left(\overline{Q}B_{SDB}M+\overline{Q}(B_{SDB})^3\right)$	$O\left(B_{SDB}ML\right)$
本文方法	$O\left(\overline{Q}B_{PM}M+\overline{Q}(B_{PM})^3\right)$	$O\left(NKM(B_{PM})^2\right)$
AP-Newton	$O(M^3+\overline{Q}M^2+LM^2+I_{AP}M)$	—
RML	$O\left(\overline{Q}M^3\right)$	—

5.2　实验数据处理结果

为了验证本文方法在实际场景中的有效性，本节基于实测数据对各算法的目标仰角估计性能进行评估。实验平台为L波段的全息凝视雷达[1]，其关键参数如表3所示。实验中采用了一架配备实时动态(Real-Time Kinematic, RTK)定位模块的DJI Mavic 3E无人机作为目标。RTK系统提供厘米级定位精度，其水平误差≤8 mm + 1 ppm，垂直误差≤15 mm + 1 ppm，实验中目标的真实仰角由RTK系统测得。实验场景如图12所示，全息凝视雷达的天线阵列和控制系统分别安装在集装箱的顶部和内部，实验地点为平坦地形。

雷达发射窄带线性调频信号，载频为1315 MHz，脉宽为2 μs，带宽为4 MHz。接收端采用8×8阵列接收通道，用于实现二维方位-俯仰联合处理，阵元间距为半波长。实验过程中无人机的飞行轨迹如图13所示。在数据处理流程中，原始回波依次经过通道校正、脉冲压缩、相参积累、动目标显示以及恒虚警检测等预处理步骤，以提取目标的有效回

表 3　L波段全息凝视雷达关键参数

Tab. 3　Key parameters of the L-Band holographic staring radar

参数	数值
带宽	2～16 MHz
接收通道数	8×8
方位覆盖范围	90°
俯仰覆盖范围	22.5°, 30.0°, 45.0°, 60.0° (可设定)
脉冲重复频率	～5 kHz
更新频率	～1 s
探测距离	10 km (@RCS 0.01 m^2)

图 12 实验场景

Fig. 12 Experimental scene

波。随后，在方位维进行波束形成，获得各方位方向的输出功率谱，并确定目标信号对应的最强方位波束；最后，选取该方位波束对应的俯仰维数据用于目标仰角估计。

图14给出了本文方法、3D-BML算法、RML-SDB算法、AP-Newton算法和RML算法在实测数据上的处理结果。图15给出了5种算法在无人机飞行观测过程中的目标仰角估计误差。由图14和图15的结果可知，本文方法的总体估计误差小于其他两种波束空间算法，且与阵元空间RML算法的估计误差接近。此外，表4列出了各算法在实测数据中的目标仰角估计RMSE。结果表明，本文方法的RMSE仅为0.1537°，优于3D-BML算法(0.4587°)、RML-SDB算法(0.1998°)和AP-Newton算法(0.1688°)，且与阵元空间RML算法(0.1279°)的结果接近。这表明本文方法在将接收数据从阵元空间映射至低维波束空间的过程中，仍能有效保留目标信息，从而在保持目标仰角估计精度的同时显著降低算法的计算复杂度。实测结果进一步验证了该方法在低仰角目标DOA估计中的优越性能，表明其在低仰角目标精确定位中具有良好的应用潜力。

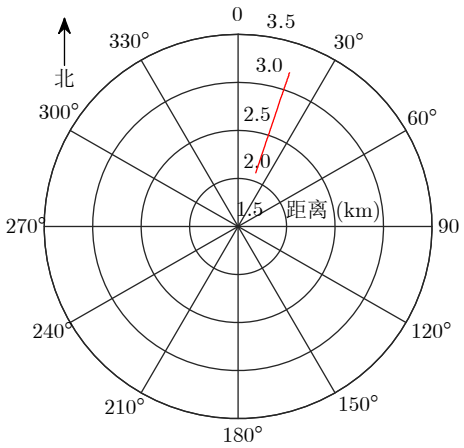

图 13 无人机飞行轨迹示意图

Fig. 13 Schematic diagram of the UAV flight trajectory

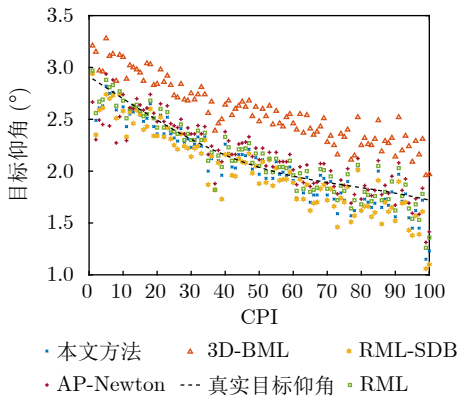

图 14 不同算法对目标仰角的估算结果

Fig. 14 Estimation results of target elevation angle using different algorithms

6 结语

针对现有波束空间低仰角目标DOA估计算法在估计精度上显著低于阵元空间方法的问题，本文提出了一种高精度波束空间DOA估计方法。首先，从目标仰角估计性能的理论分析出发，推导了阵元空间与波束空间中低仰角目标DOA估计的CRB，并给出了两者相等的充分条件。由于该条件在实际应用中难以严格满足，本文进一步提出一种基于近似条件的波束形成器设计方法，用于将接收数据从阵元空间映射至低维波束空间，在保留目标有效信息的同时降低了处理数据的维度。随后，基于最大似然准则构建目标仰角与多径到达角的联合估计代价函数，并利用二者间的几何关系将原二维联合优化问题转化为一维优化问题，显著降低了计算复杂度。仿真与实测结果表明，所提方法在降低处理数据维度的同时，能够实现接近阵元空间方法的仰角估计精度，整体性能优于现有波束空间算法，为低仰角目标DOA估计的工程应用提供了理论依据与技术支撑。

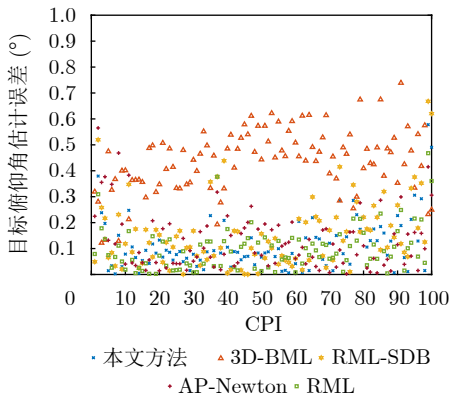

图 15 不同算法对目标仰角的估计误差

Fig. 15 Estimation errors of target elevation angle using different algorithms

表 4 不同算法对目标仰角估计的RMSE

Tab. 4 RMSE of target elevation angle estimation using different algorithms

算法	RMSE (°)
3D-BML	0.4587
RML-SDB	0.1998
AP-Newton	0.1688
RML	0.1279
本文方法	0.1537

利益冲突 所有作者均声明不存在利益冲突

Conflict of Interests The authors declare that there is no conflict of interests

参 考 文 献

[1] 郭瑞, 张月, 田彪, 等. 全息凝视雷达系统技术与发展应用综述[J]. 雷达学报, 2023, 12(2): 389–411. doi: 10.12000/JR22153.
GUO Rui, ZHANG Yue, TIAN Biao, *et al.* Review of the technology, development and applications of holographic staring radar[J]. *Journal of Radars*, 2023, 12(2): 389–411. doi: 10.12000/JR22153.

[2] LAN Lan, ROSAMILIA M, AUBRY A, *et al.* Adaptive target detection and DOA estimation with uniform rectangular arrays in the presence of unknown mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Radar Systems*, 2023, 1: 325–338. doi: 10.1109/TRS.2023.3289991.

[3] WEN Fangqing, WANG Han, GUI Guan, *et al.* Polarized intelligent reflecting surface aided 2D-DOA estimation for NLoS sources[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2024, 23(7): 8085–8098. doi: 10.1109/TWC.2023.3348520.

[4] YU Canping, LI Yingsong, LI Liping, *et al.* Dual Lawson norm-based robust DOA estimation for RIS-Aided wireless communication systems[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2025, 61(1): 582–592. doi: 10.1109/TAES.2024.3446752.

[5] WAN Liangtian, SUN Yuchen, SUN Lu, *et al.* Deep learning based autonomous vehicle super resolution DOA estimation for safety driving[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2021, 22(7): 4301–4315. doi: 10.1109/TITS.2020.3009223.

[6] XU He, LIU Wei, JIN Ming, *et al.* Positioning and contour extraction of autonomous vehicles based on enhanced DOA estimation by large-scale arrays[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2023, 10(13): 11792–11803. doi: 10.1109/JIOT.2023.3244861.

[7] 马健钧, 魏少鹏, 马晖, 等. 基于ADMM的低仰角目标二维DOA估计算法[J]. 电子与信息学报, 2022, 44(8): 2859–2866. doi: 10.11999/JEIT210582.
MA Jianjun, WEI Shaopeng, MA Hui, *et al.* Two-dimensional DOA estimation for low-angle target based on ADMM[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2022, 44(8): 2859–2866. doi: 10.11999/JEIT210582.

[8] LIU Qi, GUO Rui, WANG Jiajia, *et al.* Signal-level fusion-based height estimation of low-elevation target for distributed radar[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2025, 74: 6508114. doi: 10.1109/TIM.2025.3593573.

[9] CHEN Sheng, ZHAO Yongbo, HU Yili, *et al.* A beamspace maximum likelihood algorithm for target height estimation for a bistatic MIMO radar[J]. *Digital Signal Processing*, 2022, 122: 103330. doi: 10.1016/j.dsp.2021.103330.

[10] ZHENG Guimei, CHEN Chen, and SONG Yuwei. Height measurement for meter wave MIMO radar based on matrix pencil under complex terrain[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2023, 72(9): 11844–11854. doi: 10.1109/TVT.2023.3268791.

[11] TANG Derui, ZHAO Yongbo, NIU Ben, *et al.* Bistatic MIMO radar height estimation method based on adaptive beam-space RML data fusion[J]. *Digital Signal Processing*, 2024, 145: 104346. doi: 10.1016/j.dsp.2023.104346.

[12] LIU Qi, GUO Rui, WANG Bo, *et al.* Direct altitude estimation of low-elevation target for bistatic holographic staring radar based on coprime array[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2024, 24(11): 17926–17940. doi: 10.1109/JSEN.2024.3387534.

[13] 刘源. 米波阵列雷达低仰角目标测高方法研究[D]. [博士论文], 西安电子科技大学, 2018: 1–146.
LIU Yuan. Research on some issues of low-angle target height measurement for VHF array radar[D]. [Ph.D. dissertation], Xidian University, 2018: 1–146.

[14] 谭俊. 米波雷达低仰角测角中多径效应影响抑制及关键技术研究[D]. [博士论文], 电子科技大学, 2019: 1–130.
TAN Jun. Research on multipath effect suppression and key technologies in low-angle measurement of meter wave radar[D]. [Ph.D. dissertation], University of Electronic Science and Technology of China, 2019: 1–130.

[15] 王鸿帧, 郑桂妹, 陈晨, 等. 米波雷达低仰角估计技术分析与展望[J]. 火力与指挥控制, 2023, 48(11): 6–16. doi: 10.3969/j.issn.1002-0640.2023.11.002.
WANG Hongzhen, ZHENG Guimei, CHEN Chen, *et al.* Analysis and prospect of low elevation estimation technology for meter wave radar[J]. *Fire Control & Command Control*, 2023, 48(11): 6–16. doi: 10.3969/j.issn.1002-0640.2023.11.002.

[16] GUO Rui, ZHANG Yue, TIAN Biao, *et al.* Height measurement of Micro-UAVs with L-Band staring radar[C]. 2021 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium IGARSS, Brussels, Belgium, 2021: 7967–7970. doi: 10.1109/IGARSS47720.2021.9553143.

[17] MA Jianjun, LIU Hongwei, and MA Hui. Low-elevation target DOA estimation based on multi-scattering center equivalent model[J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(15): 3533. doi: 10.3390/rs14153533.

[18] CHEN Sheng, ZHAO Yongbo, and HU Yili. Beamspace phase solving algorithm for elevation angle estimation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2022, 29: 742–746. doi: 10.1109/LSP.2022.3154686.

[19] XIANG Houhong, CHEN Baixiao, YANG Ting, *et al.* Improved de-multipath neural network models with self-

paced feature-to-feature learning for DOA estimation in multipath environment[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020, 69(5): 5068–5078. doi: 10.1109/TVT.2020.2977894.

[20] LIU Wei, HAARDT M, GRECO M S, *et al.* Twenty-five years of sensor array and multichannel signal processing: A review of progress to date and potential research directions[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2023, 40(4): 80–91. doi: 10.1109/MSP.2023.3258060.

[21] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.

[22] PILLAI S U and KWON B H. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(1): 8–15. doi: 10.1109/29.17496.

[23] ZOLTOWSKI M and HABER F. A vector space approach to direction finding in a coherent multipath environment[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(9): 1069–1079. doi: 10.1109/TAP.1986.1143956.

[24] LIU Yuan, LIU Hongwei, XIA Xianggen, *et al.* Projection techniques for altitude estimation over complex multipath condition-based VHF radar[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2018, 11(7): 2362–2375. doi: 10.1109/JSTARS.2018.2835448.

[25] ZISKIND I and WAX M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(10): 1553–1560. doi: 10.1109/29.7543.

[26] LO T and LITVA J. Use of a highly deterministic multipath signal model in low-angle tracking[J]. *IEE Proceedings F-Radar and Signal Processing*, 1991, 138(2): 163–171. doi: 10.1049/Ip-f-2.1991.0022.

[27] LIU Yuan, JIU Bo, XIA Xianggen, *et al.* Height measurement of low-angle target using MIMO radar under multipath interference[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, 54(2): 808–818. doi: 10.1109/TAES.2017.2767919.

[28] MA Jianjun, MA Hui, LIU Hongwei, *et al.* A novel DOA estimation for low-elevation target method based on multiscattering center equivalent model[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2023, 20: 3501605. doi: 10.1109/LGRS.2023.3242977.

[29] WU Jianqi, ZHU Wei, and CHEN Baixiao. Compressed sensing techniques for altitude estimation in multipath conditions[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(3): 1891–1900. doi: 10.1109/TAES.2015.130841.

[30] GUO Rui, PENG Xiangyu, and TIAN Biao. Low elevation target altitude measurement for ubiquitous radar based on known transmitted waveform and sparse representation[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2022, 16(2): 346–355. doi: 10.1049/rsn2.12187.

[31] LIU Yuan, LIU Hongwei, WANG Lu, *et al.* Target localization in high-coherence multipath environment based on low-rank decomposition and sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2020, 58(9): 6197–6209. doi: 10.1109/TGRS.2020.2975218.

[32] LIU Yuan, LIU Hongwei, JIU Bo, *et al.* Altitude measurement of low-angle target under complex terrain environment for meter-wave radar[C]. The 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Calgary, Canada, 2018: 3464–3468. doi: 10.1109/ICASSP.2018.8462623.

[33] ZOLTOWSKI M D and LEE T S. Maximum likelihood based sensor array signal processing in the beamspace domain for low angle radar tracking[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(3): 656–671. doi: 10.1109/78.80885.

[34] CHEN Sheng, ZHAO Yongbo, HU Yili, *et al.* Beamspace maximum likelihood algorithm based on sum and difference beams for elevation estimation[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2024, 35(3): 589–598. doi: 10.23919/JSEE.2024.000057.

[35] WEISS A J and FRIEDLANDER B. On the Cramer-Rao bound for direction finding of correlated signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(1): 495. doi: 10.1109/TSP.1993.193187.

作 者 简 介

刘　旗，博士生，主要研究方向为阵列信号处理。

郭　瑞，博士，副教授，主要研究方向为数字阵列雷达技术、阵列信号处理技术等。

王佳佳，硕士生，主要研究方向为阵列信号处理。

徐世友，博士，教授，主要研究方向为宽带雷达成像、自动目标识别、信息融合、多功能数字阵列雷达等。

陈曾平，博士，教授，主要研究方向为空间态势感知、软件化雷达探测、宽带成像识别等。

(责任编辑：于青)