星历误差条件下基于卫星与短波信号的多目标协同直接定位算法

尹洁昕[①②] 王 鼎*[①②] 周 南[①②] 余天歌[①②]

[①](信息工程大学信息系统工程学院 郑州 450001)

[②](国家数字交换系统工程技术研究中心 郑州 450002)

摘要：针对星历误差影响下多个地面辐射源的超视距定位问题，提出了一种基于卫星信号与短波信号的多目标协同直接定位算法。通过利用地球椭圆模型下短波方位角、卫星时差与目标辐射源地理坐标之间的几何关系，建立联合短波和卫星观测信号的超视距多目标定位模型。在此基础上，结合两种频段的观测信号模型与星历误差统计模型，构造基于贝叶斯理论的最大似然代价函数，通过设计交替迭代算法实现了对多个目标地理坐标与星历误差等参数的迭代求解。仿真结果表明，该算法的定位精度较基于卫星与短波单一频段的定位算法有明显提升，不易受观测站与目标几何构型变化影响，而且能够有效削弱星历误差带来的定位扰动，在大星历误差条件下具有较强的鲁棒性。

关键词：协同直接定位；卫星信号；短波信号；多目标辐射源；星历误差

中图分类号：TN911.7 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-283X(2026)x-0001-23

DOI: 10.12000/JR25138 **CSTR**: 32380.14.JR25138

引用格式：尹洁昕, 王鼎, 周南, 等. 星历误差条件下基于卫星与短波信号的多目标协同直接定位算法[J]. 雷达学报(中英文), 待出版. doi: 10.12000/JR25138.

Reference format: YIN Jiexin, WANG Ding, ZHOU Nan, *et al*. A multi-target cooperative direct position determination algorithm fusing satellite and shortwave signals in the presence of satellite orbit errors[J]. *Journal of Radars*, in press. doi: 10.12000/JR25138.

A Multi-target Cooperative Direct Position Determination Algorithm Fusing Satellite and Shortwave Signals in the Presence of Satellite Orbit Errors

YIN Jiexin[①②] WANG Ding*[①②] ZHOU Nan[①②] YU Tiange[①②]

[①](*Institute of Information System Engineering*, *Information Engineering University*, *Zhengzhou* 450001, *China*)

[②](*National Digital Switching System Engineering and Technology Research Center*, *Zhengzhou* 450002, *China*)

Abstract: To address the over-the-horizon localization of multiple ground-based radiating sources in the presence of satellite orbit errors, this paper proposes a multi-target cooperative Direct Position Determination (DPD) algorithm fusing satellite and shortwave signals. Under the Earth ellipsoid model, the geometric relationships among shortwave azimuth angles, satellite time differences of arrival, and the geodetic coordinates of the target radiators are exploited to construct a multi-target over-the-horizon localization model that jointly incorporates shortwave and satellite observations. Furthermore, the statistical model of satellite orbit errors is

收稿日期：2025-07-25；改回日期：2026-09-07；网络出版：2026-xx-xx

*通信作者： 王鼎 wang_ding814@aliyun.com *Corresponding Author: WANG Ding, wang_ding814@aliyun.com

基金项目：国家自然科学基金(61901526, 62171469, 62071029)，军事科技领域青年人才托举工程(2022-JCJQ-QT-028)，河南省优秀青年科学基金(242300421174)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61901526, 62171469, 62071029), Military Science and Technology Youth Talent Support Program (2022-JCJQ-QT-028), Henan Provincial Excellent Young Scientists Fund (242300421174)

责任主编：夏正欢 Corresponding Editor: XIA Zhenghuan

©The Author(s) 2026. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

combined with the observation models of the two frequency bands to formulate a Bayesian maximum likelihood cost function, and an alternating iterative scheme is designed to jointly estimate the unknown parameters, including the geodetic coordinates of the multiple targets and the satellite orbit errors. Simulation results show that the proposed algorithm attains markedly higher localization accuracy than methods relying solely on satellite or on shortwave measurements, and that it remains robust to changes in the geometric layout of observers and targets. Moreover, the algorithm also effectively mitigates the accuracy degradation caused by satellite orbit errors and maintains strong performance even when these errors are large.

Key words: Cooperative Direct Position Determination (DPD); Satellite signal; Shortwave signal; Multiple target radiators; Satellite orbit errors

1 引言

无线信号定位技术对于目标发现及态势感知具有十分重要的意义。根据定位平台或频段进行划分，常用定位系统包括星基定位与陆基定位。星基定位系统，即卫星定位系统具有大范围的高精度定位、测速和提供定时服务的能力，在国防和国民经济各个领域得到了广泛应用[1,2]。在陆基定位系统中，短波通信方式在民用领域与军事领域中均获得了持久、广泛的应用[3]，且其具备天波传播模式，它是陆基超视距定位系统的重要组成部分[4]。与有源定位系统相比，无源定位系统具有不主动发射电磁信号、生存能力强、侦察作用距离远等优势[5]，因而受到国内外学者的广泛关注，本文重点研究针对地面超视距辐射源的无源定位方法。

在短波天波超视距定位场景中，信号到达俯仰角高度依赖电离层虚高(Ionosphere Virtual Height, IVH)参数[6]，由于电离层的时空变化特性难以精确获知，基于俯仰角的定位模型精度非常容易受到影响，因此短波频段的超视距无源定位大多通过多个阵列观测站的到达方位角交汇定位实现[7]。卫星无源定位系统一般是地面目标辐射信号经过卫星转发至地面观测站，通过利用不同卫星转发信号传播路径的时差或者频差实现定位[1,2]。短波交汇定位精度对目标与观测站的距离较为敏感，因而对远距离目标定位精度受限；卫星时差定位虽然对远距离目标的定位鲁棒性更强，但是时差估计精度通常会受到信号带宽的影响。此外，从地球参考椭球的角度来看，短波定位的几何精度因子(Geometric Dilution Precision, GDOP)与卫星定位的GDOP也是互不相同的[8]。因此，若能够有效地将两种系统进行联合定位，可以达到弥补定位短板、保持定位优势的效果，从而增大有效定位的覆盖范围。要实现两种手段联合定位，需要待定位辐射源同时或在短时间内发射短波信号和卫星信号。在实际应用场景中，各类地面关键辐射源(固定通信枢纽、机动侦察电台、应急通信终端等)为适应复杂作战环境的通信冗余与抗干扰需求，通常会交替或并行搭载短波天波超视距通信、卫星通信体制工作模式[8]，其中短波天波传播的信号承担超视距战略通信，低轨卫星转发信号承担超视距机动补盲通信，因此本文考虑的应用场景是现实存在、有实际应用价值的。

针对卫星与短波超视距联合无源定位场景，文献[8]建立了二次约束加权最小二乘(Quadratic Constrained Weighted Least Squares, QCWLS)优化模型，并提出一种基于可微精确罚函数的迭代求解方法，该方法在多种定位场景下均比仅基于卫星或短波单一定位系统的精度更高。该算法属于两步估计方式，即首先从卫星与短波接收信号中分别估计用于定位的时差参数与角度参数，然后利用这些中间观测参数求解目标位置参数。从信息论的角度，两步估计方式的中间处理环节将带来信息损失，难以达到最优估计性能，当多目标存在时，中间观测参数的数据关联错误将导致更大的定位误差。与两步定位方式不同，直接定位(Direct Position Determination, DPD)方法是从原始信号中采样，经过相应处理得到与目标位置有关的代价函数，从而直接对目标辐射源进行定位，避免了中间参数估计与数据关联问题，近年来的研究表明这种单步定位方式具有更高的定位精度和更低的分辨门限[9–11]。为此，文献[12]提出了一种基于多目标空域规律约束的卫星与短波信号协同直接定位方法，该方法利用拉格朗日乘子法将含约束的优化模型转换为无约束优化模型进行求解，从短波信号与卫星信号中直接估计多目标的位置参数，进一步提升了低信噪比条件下对地球表面超视距目标的定位精度。需要指出的是，上述联合定位方法没有考虑短波与卫星定位中信道误差、系统误差等非理想因素，例如电离层电子密度不均匀、电离层总电子含量(Total Electron Content, TEC)的时空变化会分别造成短波测向偏差[13]与卫星信号传播时延误差[14]，卫星在太空中运行时，会受到多种因素的扰动，从而导致星历误差[15,16]。上述误差均会导致定位模型失配，

从而降低卫星与短波联合定位性能。考虑到高精度电离层参数反演涉及多类复杂技术[14]，是一个兼具理论深度与工程复杂度的独立课题，因此本文主要关注星历误差对联合定位性能的影响与校正问题。

在多目标辐射源的定位场景中，星历误差(包括传感器位置/速度误差)、时钟同步误差、阵列通道误差等观测平台自身的系统误差对同平台下所有辐射源具备一致性的影响，此时若考虑对多个辐射源进行协同定位，则能够获得协同增益，提高整体定位精度。在现有两步定位研究中，文献[17]提出基于两步加权最小二乘(Two Step Weighted Least Squares, TSWLS)的多辐射源联合到达时间差(Time Difference of Arrival, TDOA)与到达频率差(Frequency Difference of Arrival, FDOA)的协同定位方法，实现了对多个非相关辐射源以及各传感器位置和速度的联合估计；文献[18]提出一种基于加权多维标度分析的联合到达时间(Time of Arrival, TOA)与到达频率(Frequency of Arrival, FOA)多辐射源协同定位方法，能够同时抑制时钟同步误差、传感器位置与速度观测误差的影响。在直接定位相关研究中，文献[19,20]先后针对观测站阵列通道幅相误差与互耦影响，研究了多个目标辐射源位置与阵列误差参数的联合估计；文献[21]基于多无人机观测平台，提出了时钟误差扰动下的多辐射源协同自校正定位方法。上述方法均利用了不同辐射源所受观测平台误差影响相同这一隐含约束条件，提升了多目标整体的定位性能，但尚未挖掘多频段联合定位的互补优势，现有研究仍存在一定的局限性。

基于上述研究背景，本文针对多个同时或在短时间内发射短波信号和卫星信号的地面辐射源，在卫星星历误差的影响下，提出协同利用多个目标辐射源的三星转发信号与多个短波阵列接收信号的直接定位算法。该算法在地球椭圆模型的约束下，通过建立短波方位角、卫星时差与目标地理坐标之间的几何关系，从而构造联合短波和卫星观测信号的超视距多目标定位模型，其中基于短波方位角的定位模型是依托观测站本地坐标配合坐标旋转矩阵推导构建的。通过引入星历误差的先验统计特征，并考虑各目标信号中含有相同星历误差参数这一约束条件，建立基于贝叶斯理论的优化模型，然后设计交替迭代算法实现对多个目标地理坐标的直接估计。本文所提算法对卫星与短波两种频段进行信号级融合定位，这种底层融合方式可最大限度保留原始信号信息，充分挖掘多频段接收信号中多个目标位置与星历误差的耦合关联。与基于卫星与短波单一频段的定位算法相比，本文算法受观测站与目标几何构型变化影响较小，可有效削弱星历误差带来的定位扰动，在大星历误差条件下具有更强的鲁棒性。

2　短波和卫星观测信号与超视距定位模型

本节将首先建立基于短波角度信息的观测信号模型，在此基础上构建短波超视距传播下目标辐射源的到达方位角与目标地理坐标的代数关系式；然后建立基于三星时差信息的观测信号模型，在此基础上构建卫星转发目标信号的时差与目标地理坐标的代数关系式，上述代数关系式是从观测信号直接估计目标地理坐标的模型基础；最后，本节将对星历误差的统计特性进行建模，为后续星历误差的校正提供先验信息。

在描述定位模型之前，给出全文所用到的数学符号，具体符号说明如表1所示。

考虑Q个待定位的地面辐射源(假设所在地面高程已知)同时或者在短时间内发射短波通信信号与卫星通信信号，第$q(q=1,2,\cdots,Q)$个待定位辐射源的经纬度为α_q，γ_q，已知的地面高程为$h_{\mathrm{T},q}$。联合短波多站定位系统与三星定位系统对Q个地面辐射源进行观测定位，以某卫星地面站作为计算中心，其余卫星地面站与各短波观测站将接收信号传输至计算中心，由该计算中心完成短波与卫星协同直接定位的求解，上述直接定位场景示意图如图1所示。其中，短波定位系统包含$K(K>1)$个短波地面观测站，其经度、纬度及所在地面高程分别为ζ_k，χ_k和$h_k(k=1,2,\cdots,K)$，每个观测站由$M_k(k=1,2,\cdots,K)$元阵列构成，假设地面观测站接收到的短波信号是以天波超视距传播方式经电离层反射得到的；卫星定位系统由卫星地面站对3颗卫星转发的信号进行接收和采集，每颗卫星的经度、纬度及轨道高度分别为ζ_k'，χ_k'和$h_k'(k=1,2,3)$，卫星地面站经度、纬度及所在地面高程分别为ζ_k''，χ_k''和$h_k''(k=1,2,3)$，假设各卫星地面站在时间与频率上精确同步。

根据上述联合短波与卫星定位系统的多目标定位场景，下面分别建立基于短波角度信息与卫星时差信息的观测信号与超视距定位模型，并考虑卫星星历误差的影响，引入星历误差的先验统计特征。

2.1　基于短波角度信息的观测信号与超视距定位模型

针对Q个待定位辐射源发射的短波信号，利用$K(K<1)$个短波观测站安装的阵列(能接收二维角

表 1 符号说明

Tab. 1 Notation explanation

符号	说明
$\{\cdot\}^*$	表示矩阵或矢量的共轭
$\{\cdot\}^{\mathrm{T}}$	表示矩阵或矢量的转置
$\{\cdot\}^{\mathrm{H}}$	表示矩阵或矢量的共轭转置
$\{\cdot\}^{\dagger}$	表示矩阵或矢量的Moore-Penrose逆
$\odot$	表示矩阵Hadamard乘积
$\mathrm{diag}\{\cdot\}$	表示由矢量中的元素构成的对角矩阵/提取矩阵中对角元素组成矢量
$\boldsymbol{\Pi}[\boldsymbol{X}]$与$\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{X}]$	表示矩阵$\boldsymbol{X}$的列空间和列补空间上的正交投影矩阵
$\delta_{k,k'}$	表示Kronecker Delta函数，即当且仅当k=k'，有$\delta_{k,k'}=1$；否则$\delta_{k,k'}=0$
$\mathbb{E}[\cdot]$	表示求期望运算
$\mathrm{tr}\{\cdot\}$	表示矩阵的迹
$\mathrm{Re}\{\cdot\}$	表示取实部
$\boldsymbol{I}_N$	表示$N\times N$的单位矩阵
$\mathbb{R}^{N\times M}$	表示$N\times M$的实数矩阵集合
$\mathbb{C}^{N\times M}$	表示$N\times M$的复数矩阵集合
$\|\cdot\|_2$	表示矢量的Euclidean范数
c	表示电波传播速度

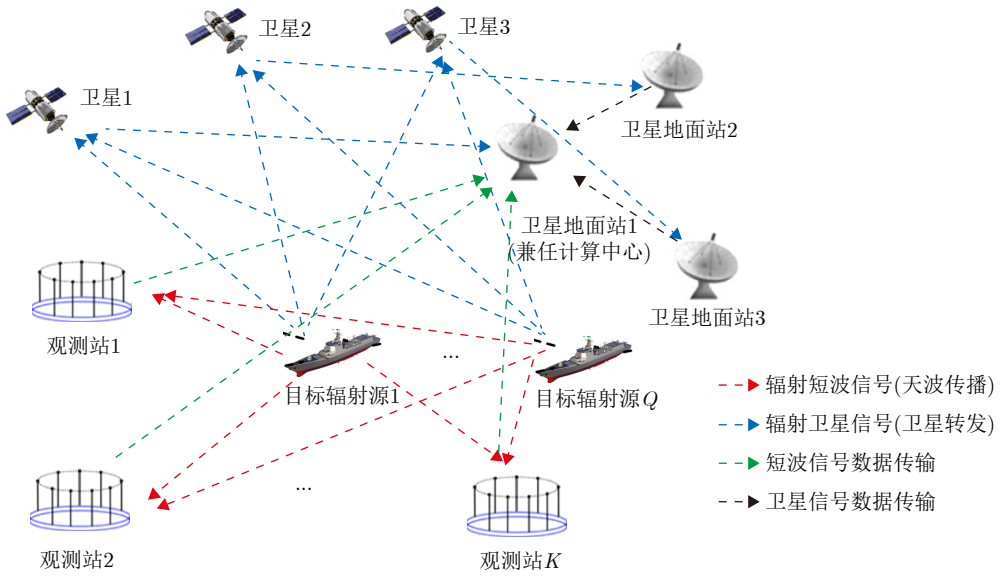


图 1 卫星与短波多目标协同直接定位场景示意图

Fig. 1 The scenario of cooperative DPD based on satellite and shortwave signals for multiple targets

度信息)对该信号进行接收和采集。假设第q个短波信号到达第k个短波观测站的方位角(与正北方向的顺时针夹角)和仰角分别为$\theta_{k,q}$和$\psi_{k,q}$，由于信号经过多次电离层或地面反射后衰减通常很大，因此仅考虑短波单跳传播的主径信号，此时第k个短波观测站在t_n时刻采样得到的阵列接收信号可以建模为[9]

$$\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{t}_n)=\sum_{q=1}^{Q}\boldsymbol{a}_k(\theta_{k,q},\psi_{k,q})s_{k,q}(t_n)+\boldsymbol{n}_k(t_n)\quad(k=1,2,\cdots,K;n=1,2,\cdots,N)\tag{1}$$

其中，N为每个短波观测站对辐射信号的采样点数；$s_{k,q}(t_n)$表示在t_n时刻到达第k个短波观测站的第q个辐射源的短波信号复包络(包含路径损耗与天线接收增益等影响)；$\boldsymbol{n}_k(t_n)$表示该采样时刻上的阵列加性高斯白噪声，其均值为零、协方差矩阵为$\sigma_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{I}_{M_k}$($\sigma_{\mathrm{n}}^2$表示噪声功率)；$\boldsymbol{a}_k(\theta_{k,q},\psi_{k,q})\in\mathbb{C}^{M_k\times 1}$表示关于第$q$个辐射源二维波达方向的阵列流形矢量。

根据文献[22]中的讨论可知，短波天波传输信号进入电离层和离开电离层的两条路径可以利用

(单跳)平面反射模型来近似表征。在单跳电离层反射模型下，可以建立方位角、俯仰角与目标辐射源之间的几何关系，其中俯仰角与目标辐射源位置的几何关系需要利用电离层虚高参数。电离层虚高的先验观测值虽然可以通过垂直探测技术、后向散射反演技术等获得，但是其观测值与其真实值之间通常会存在一定偏差[23]，从而影响定位精度。因此，本文将俯仰角作为独立参数进行估计，仅利用方位角与目标辐射源位置的几何关系实现定位。

图2描述了以地心地固坐标系为参考，在地球椭圆模型下短波方位角与目标辐射源地理坐标(即经纬度)的几何关系。地心地固坐标系(Earth-Centered Earth-Fixed, ECEF)是一种以地球质心为坐标系原点的直角坐标系，其Z轴与地轴平行指向北极点，X轴指向本初子午线与赤道的交点，Y轴垂直于XOZ平面(即东经90°与赤道的交点)构成右手坐标系。根据短波信号天波传播模式及坐标转换的几何关系，利用第$k(k=1,2,\cdots,K)$个短波观测站的地理坐标，可以建立第$q(q=1,2,\cdots,Q)$个辐射源地理坐标与其发射短波信号到达第$k(k=1,2,\cdots,K)$个短波观测站方位角之间的代数关系式：

$$\theta_{k,q}=\arctan\left(\frac{\boldsymbol{t}_x^{\mathrm{T}}(\zeta_k)\cdot(\boldsymbol{z}(\alpha_q,\gamma_q)-\boldsymbol{z}(\zeta_k,\chi_k,h_k))}{\boldsymbol{t}_y^{\mathrm{T}}(\zeta_k,\chi_k)\cdot(\boldsymbol{z}(\alpha_q,\gamma_q)-\boldsymbol{z}(\zeta_k,\chi_k,h_k))}\right)\quad(k=1,2,\cdots,K;q=1,2,\cdots,Q)\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{t}_x(\zeta_k)$和$\boldsymbol{t}_y(\zeta_k,\chi_k)$表示以短波观测站地理坐标为变量的坐标系旋转矢量，用来将地心地固坐标转换为短波地面观测站的本地直角坐标系，本地直角坐标系以观测站为坐标系原点，其Z轴与地球椭圆法线重合(向上为正)，Y轴与地球椭圆短半轴重合(北向)，X轴与地球椭圆的长半轴重合(东向)；$\boldsymbol{z}(\alpha_q,\gamma_q)$表示第$q(q=1,2,\cdots,Q)$个待定位辐射源在地心地固坐标系下的位置矢量(由于本文假设目标辐射源所在地面高程先验已知，因此在辐射源地心地固坐标变换的参数变量中省略了其高程参数)；$\boldsymbol{z}(\zeta_k,\chi_k,h_k)$表示第$k(k=1,2,\cdots,K)$个短波地面观测站在地心地固坐标系下的位置矢量。上述矢量的具体表达式如下[8]：

$$\boldsymbol{z}(\alpha_q,\gamma_q)=\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\gamma_q}}\begin{bmatrix}r_a\cos(\gamma_q)\cos(\alpha_q)\\ r_a\cos(\gamma_q)\sin(\alpha_q)\\ \left(r_a(1-e^2)+h_{\mathrm{T},q}\sqrt{1-e^2\sin^2\gamma_q}\right)\sin(\gamma_q)\end{bmatrix}\quad(q=1,2,\cdots,Q)\tag{3}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}_x(\zeta_k)=\begin{bmatrix}-\sin(\zeta_k)\\ \cos(\zeta_k)\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_y(\zeta_k,\chi_k)=\begin{bmatrix}-\cos(\zeta_k)\sin(\chi_k)\\ -\sin(\zeta_k)\sin(\chi_k)\\ \cos(\chi_k)\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{z}(\zeta_k,\chi_k,h_k)=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\chi_k}}\begin{bmatrix}r_a\cos(\chi_k)\cos(\zeta_k)\\ r_a\cos(\chi_k)\sin(\zeta_k)\\ \left(r_a(1-e^2)+h_k\sqrt{1-e^2\sin^2\chi_k}\right)\sin(\chi_k)\end{bmatrix}\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,K)\tag{4}$$

其中，$e=\sqrt{r_a^2-r_b^2}/r_a$，r_a，r_b分别为地球参考椭球的长、短轴。

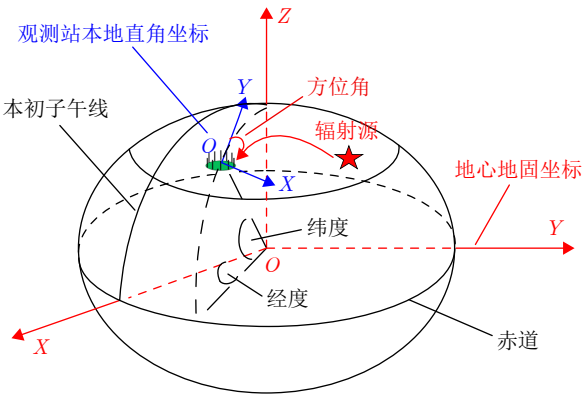


图 2 基于地球椭圆模型的短波方位角几何示意图

Fig. 2 Geometric diagram of shortwave azimuth angle based on ellipse Earth model

利用到达方位角与待定位辐射源地理坐标之间的几何关系，可以将阵列流形矢量$\boldsymbol{a}_k(\theta_{k,q},\psi_{k,q})$重新表示为关于第$q(q=1,2,\cdots,Q)$个待定位辐射源地理坐标矢量$\boldsymbol{p}_q=[\gamma_q,\alpha_q]^{\mathrm{T}}$与其到达俯仰角的函数矢量$\boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p}_q,\psi_{k,q})$，即

$$\boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p}_q,\psi_{k,q})=\boldsymbol{a}_k(\theta_{k,q},\psi_{k,q})\quad(k=1,2,\cdots,K;q=1,2,\cdots,Q)\tag{5}$$

此时，第$k(k=1,2,\cdots,K)$个短波观测站的阵列接收信号模型能够进一步表示为

$$\boldsymbol{x}_k(t_n)=\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi_k})\boldsymbol{s}_k(t_n)+\boldsymbol{n}_k(t_n)\quad(k=1,2,\cdots,K;\ n=1,2,\cdots,N)\tag{6}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{p}}=[\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{p}_Q^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2Q\times1}$包含$Q$个待定位辐射源的地理坐标；$\boldsymbol{s}_k(t_n)=[s_{k,1}(t_n)\ s_{k,2}(t_n)\cdots s_{k,Q}(t_n)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{Q\times1}$与$\boldsymbol{\psi}_k=[\psi_{k,1}\ \psi_{k,2}\cdots\psi_{k,Q}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{Q\times1}$分别包含$Q$个待定位辐射源发射短波信号到达第

$k(k=1,2,\cdots,K)$个观测站的信号复包络与到达俯仰角；$\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)=[\boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p}_1,\psi_{k,1})\ \boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p}_2,\psi_{k,2})\cdots\boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p}_Q,\psi_{k,Q})]\in\mathbb{C}^{M_k\times Q}$表示$Q$个待定位辐射源的阵列流形矩阵。

需要说明的是，为了保证短波观测矢量$\boldsymbol{x}_k(t_n)$对Q个目标辐射源的到达角度可测，需要$\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)$满足列满秩，即要求目标的个数不能大于阵元个数$M_k$，即对目标容量的限制为

$$Q<M_k\ \ (k=1,2,\cdots,K) \tag{7}$$

2.2 基于卫星时差信息的观测信号与超视距定位模型

针对Q个待定位辐射源发射的卫星信号，经过3颗卫星转发后，利用不同卫星地面站对转发信号进行接收与采集，假设第q个目标辐射的信号经过第k颗卫星转发到达卫星地面站的传播时延为$\tau_{k,q}$，那么卫星地面站在t_n时刻采样得到由第k颗卫星转发的信号可以建模为

$$\begin{aligned}y_k(t_n)\ &=\sum_{q=1}^{Q}\beta_{k,q}s'_q(t_n-t_{q0}-\tau_{k,q})+\varepsilon_k(t_n)\\&(k=1,2,3;n=1,2,\cdots,N')\end{aligned} \tag{8}$$

其中，N'为每个地面站对卫星信号的采样点数；$s'_q(t_n-t_{q0}-\tau_{k,q})$表示该采样时刻采集得到的第$q$个待定位辐射源在$t_{q0}$时刻发送并由第$k$颗卫星转发到达地面站时延为$\tau_{k,q}$的信号复包络，这里假设发射的卫星信号复包络$s'_q(t_n-t_{q0})$已知；$\varepsilon_k(t_n)$表示地面站在该采样时刻上接收第$k$颗卫星转发通道中的加性高斯白噪声，其均值为零、功率为σ'^2_{n}；$\beta_{k,q}$表示由第q个待定位辐射源发射的卫星信号经第k颗卫星转发到达地面站之间的信道复传播系数(包含路径损耗与天线接收增益等影响)。

根据卫星转发信号传输链路的几何关系，可以建立第q个辐射源地理坐标与其发射的卫星信号经过每颗卫星转发到卫星地面站传播时延之间的代数关系式，即为

$$\begin{aligned}\tau_{kq}=\frac{1}{c}(&||\boldsymbol{z}(\alpha_q,\gamma_q)-\boldsymbol{z}(\zeta'_k,\chi'_k,h'_k)||_2\\&+||\boldsymbol{z}(\zeta'_k,\chi'_k,h'_k)-\boldsymbol{z}(\zeta''_k,\chi''_k,h''_k)||_2)\\&(k=1,2,3)\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{z}(\zeta'_k,\chi'_k,h'_k)$表示第$k$个卫星在地心地固坐标系下的位置矢量，$\boldsymbol{z}(\zeta''_k,\chi''_k,h''_k)$表示卫星地面站在地心地固坐标系下的位置矢量，它们的具体表达式如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}(\zeta'_k,\chi'_k,h'_k)=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\chi_k}}\begin{bmatrix}r_a\cos(\chi'_k)\cos(\zeta'_k)\\r_a\cos(\chi'_k)\sin(\zeta'_k)\\\left(r_a(1-e^2)+h'_k\sqrt{1-e^2\sin^2\chi_k}\right)\sin(\chi'_k)\end{bmatrix}\\\boldsymbol{z}(\zeta''_k,\chi''k,h''_k)=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\chi''_k}}\begin{bmatrix}r_a\cos(\chi''_k)\cos(\zeta''_k)\\r_a\cos(\chi''_k)\sin(\zeta''_k)\\\left(r_a(1-e^2)+h''_k\sqrt{1-e^2\sin^2\chi''_k}\right)\sin(\chi''_k)\end{bmatrix}\end{cases}\quad(k=1,2,3) \tag{10}$$

将第k个卫星地面站多个采样时刻得到的接收信号组成卫星观测信号矢量，并利用傅里叶变换的时移性质，可将该卫星观测信号矢量表示为与待定位辐射源地理坐标有关的表达式，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_k&=[y_k(t_1)\ y_k(t_2)\cdots y_k(t_{N'})]^{\mathrm{T}}\\&=\sum_{q=1}^{Q}\beta_{k,q}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k,q}(\boldsymbol{p}_q,\boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}'_{q0}+\boldsymbol{\varepsilon}_k\ (k=1,2,3)\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\sqrt{N'}}\exp\left(-\mathrm{j}\dfrac{2\pi}{N'}\boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}'^{\mathrm{T}}\right)$为DFT变换因子，$\boldsymbol{N}'=[0,1,\cdots,N'-1]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{D}_{k,q}(\boldsymbol{p}_q,\boldsymbol{\xi}_k)$是与时延$\tau_{k,q}$有关的相位偏移矩阵，根据式(9)可以将其表示为与待定位辐射源地理坐标$\boldsymbol{p}_q$与卫星地心地固位置矢量$\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{z}(\zeta'_k,\chi'_k,h'_k)$的函数矩阵，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{k,q}(\boldsymbol{p}_q,\boldsymbol{\xi}_k)&=\mathrm{diag}\left\{\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi\tau_{kq}}{N'T_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{N}'\right)\right\}\\&(k=1,2,3;q=1,2,\cdots,Q)\end{aligned} \tag{12}$$

其中，T_{s}表示对卫星信号的采样周期。

令

$$\boldsymbol{\beta}_k=[\beta_{k,1}\ \beta_{k,2}\cdots\beta_{k,Q}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{Q\times 1} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_k)=[&\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k,1}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}'_{10}\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k,2}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{\xi}_k)\\&\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}'_{20}\cdots\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k,Q}(\boldsymbol{p}_Q,\boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}'_{Q0}]\\&\in\mathbb{C}^{N'\times Q}\end{aligned} \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{s}'_{q0}=[s'_q(t_1-t_{q0})\ s'_q(t_2-t_{q0})\cdots s'_q(t_{N'}-t_{q0})]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{N'\times 1}$。

利用式(13)与式(14)，可以进一步将卫星观测信号矢量$\boldsymbol{y}_k$表示为更简洁的矩阵形式：

$$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{\Phi}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{\beta}_k+\boldsymbol{\varepsilon}_k\ \ (k=1,2,3) \tag{15}$$

需要说明的是，为了保证卫星观测矢量$\boldsymbol{y}_k$对Q个目标辐射源的时差可测，需要$\boldsymbol{\Phi}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_k)$满足列满秩，即要求目标个数不能大于卫星接收信号的采样点数N'，即对目标容量的限制为

$$Q<N' \tag{16}$$

综上所述，为满足短波和卫星信号能够协同定位，即要求短波到达角度与卫星时差均可测，联合式(7)与式(16)，对于目标容量的限制为

$$Q<\min\{N',M_1,M_2,\cdots,M_K\} \tag{17}$$

2.3 星历误差模型

星历误差是星历给出的卫星位置与速度观测值与其真实值之间存在的误差。卫星在太空中运行时，会受到多种因素的影响，如地球引力场的不均匀性、太阳和月球的引力、大气阻力、太阳光压等。这些因素会导致卫星的实际轨道偏离理想的开普勒轨道，而卫星监测站难以精确考虑所有这些摄动因素，因此在星历计算中会产生较大的误差。

由于本文所利用的是卫星时差定位系统，因此星历误差对定位的影响仅需要考虑卫星位置的观测误差。将包含观测误差的第k颗卫星地心地固位置矢量记为$\breve{\boldsymbol{\xi}}_k=\breve{\boldsymbol{z}}(\breve{\zeta}_k',\breve{\chi}_k',\breve{h}_k')$，一般来说，能够将$\breve{\boldsymbol{\xi}}_k$建模为高斯分布的随机矢量，其均值为真值$\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{z}(\zeta_k',\chi_k',h_k')$，通常假设不同卫星的星历误差相互独立[15,16]，其$\breve{\boldsymbol{\xi}}_k$的协方差矩阵满足：

$$\mathbb{E}\left[\left(\breve{\boldsymbol{\xi}}_k-\boldsymbol{\xi}_k\right)\left(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'}\right)^{\mathrm{T}}\right]=\boldsymbol{Q}_k\delta_{k,k'} \tag{18}$$

本文假设$\boldsymbol{Q}_k$先验已知，$\boldsymbol{Q}_k$可以由大量实验数据估计得到。

3 星历误差条件下的多目标协同定位

本节将在第2节建立的短波和卫星观测信号模型与超视距定位模型基础上，以星历误差统计特性为先验信息，基于贝叶斯理论首先建立关于多维参数的非线性优化模型；然后，通过对优化模型中代价函数进行参数去冗余的“降维”处理，并根据代价函数的代数特征，将待优化参量划分为目标位置参数、短波俯仰角参数、星历参数等3类，从而对上述3类参数进行交替迭代求解，实现星历误差条件下卫星与短波的多目标协同定位；最后，根据交替迭代求解步骤，对该算法的计算复杂度进行定量分析。

3.1 基于贝叶斯理论的优化模型

当观测的卫星位置参数存在误差时，将该场景下包含的所有待估计参数矢量记为$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$：

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}=[\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$包含了3颗卫星的地心地固位置矢量，$\boldsymbol{\eta}$包含了所有待定位辐射源的地理坐标矢量$\tilde{\boldsymbol{p}}$、$K$个短波观测站接收信号的到达俯仰角参数$\boldsymbol{\psi}_k(k=1,2,\cdots,K)$与短波信号复包络参数$\boldsymbol{s}_k(k=1,2,\cdots,K)$、卫星信号经过3颗卫星转发路径的复传播系数$\boldsymbol{\beta}_k(k=1,2,3)$。

协同直接定位算法需要各个短波观测站与卫星地面站将采集得到的信号数据传输至地面计算中心站进行处理。在先验已知星历误差的统计特征(见式(18))条件下，基于短波观测信号模型(见式(6))与卫星观测信号模型(见式(15))，利用贝叶斯估计准则可将短波观测矢量$\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}_k(t_n)\}_{k=1,2,\cdots,K;n=1,2,\cdots,N}$、卫星观测矢量$\boldsymbol{y}=\{\boldsymbol{y}_k\}_{k=1,2,3}$与星历观测矢量$\breve{\boldsymbol{\xi}}=\{\breve{\boldsymbol{\xi}}_k\}_{k=1,2,3}$的联合概率密度函数(Probability Density Function, PDF) $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\breve{\boldsymbol{\zeta}};\tilde{\boldsymbol{\eta}})$表示为

$$p\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\breve{\boldsymbol{\zeta}};\tilde{\boldsymbol{\eta}}\right)=p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta})\cdot p(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\cdot p\left(\breve{\boldsymbol{\zeta}};\boldsymbol{\zeta}\right) \tag{20}$$

其中，$p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta})$，$p(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})$与$p(\breve{\boldsymbol{\zeta}};\boldsymbol{\zeta})$分别是短波观测矢量、卫星观测矢量以及星历观测矢量的PDF。

根据式(6)建立的短波观测信号模型，在确定性信号模型的假设条件下，$\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{s}_k(t_n)$可以看作观测矢量$\boldsymbol{x}_k(t_n)$的数学期望。由于噪声矢量$\boldsymbol{n}_k(t_n)$的各个分量为相互独立的零均值复圆高斯白噪声，且通常不同观测站在不同采样时刻的观测噪声相互独立，那么K个短波观测站的N个观测矢量$\boldsymbol{x}_k(t_n)$服从独立的均值为$\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{s}_k(t_n)$、方差为$\sigma_{\mathrm{n}}^2$的复高斯分布，其联合概率密度函数$p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta})$可以表示为[24]

$$p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta})=\prod_{k=1}^{K}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{\left(\pi\sigma_{\mathrm{n}}^2\right)^{M_k}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\left\|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}(t_n)-\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{k}}(t_n)\right\|_2^2\right\} \tag{21}$$

同理，根据式(15)建立的卫星观测信号模型，在确定性信号模型的假设条件下，3个卫星观测矢量的联合概率密度函数$p(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})$可以表示为[24]

$$p(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})=\prod_{k'=1}^{3}\frac{1}{\left(\pi\sigma_{\mathrm{n}}'^2\right)^{N'}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\left\|\boldsymbol{y}_{k'}-\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})\boldsymbol{\beta}_{k'}\right\|_2^2\right\} \tag{22}$$

根据1.3节建立的星历误差模型，星历观测矢量$\breve{\boldsymbol{\xi}}$为高斯分布的实随机矢量，且不同卫星星历观测量之间相互独立[15,16]，那么其概率密度函数(PDF)$p(\breve{\boldsymbol{\zeta}};\boldsymbol{\zeta})$可以表示为[24]

$$p(\breve{\boldsymbol{\zeta}};\boldsymbol{\zeta})=\prod_{k'=1}^{3}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{3}\det^{1/2}[\boldsymbol{Q}_{k'}]}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{\zeta}}_{k'}-\boldsymbol{\zeta}_{k'})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k'}^{-1}(\breve{\boldsymbol{\zeta}}_{k'}-\boldsymbol{\zeta}_{k'})\right\}=\prod_{k'=1}^{3}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{3}\det^{1/2}[\boldsymbol{Q}_{k'}]}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Q}_{k'}^{-1/2}(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'})\right\|_2^2\right\}\tag{23}$$

那么将式(21)—式(23)代入式(20)中，得到关于所有待估计参数矢量$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$的对数似然函数$L(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$为

$$L(\tilde{\boldsymbol{\eta}})=-\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}||\boldsymbol{x}_k(t_n)-\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)\boldsymbol{s}_k(t_n)||_2^2-\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}||\boldsymbol{y}_{k'}-\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})\boldsymbol{\beta}_{k'}||_2^2-\frac{1}{2}\sum_{k'=1}^{3}\left\|\boldsymbol{Q}_{k'}^{-1/2}(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'})\right\|_2^2+C_L\tag{24}$$

其中，C_L是与待估计参数矢量$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$无关的常数。

基于最大似然准则，利用式(24)可以建立关于参数$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$的优化模型为

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}V(\tilde{\boldsymbol{\eta}})=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}\left\{V_1^{(\mathrm{I})}(\boldsymbol{\eta})+V_1^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})+V_3(\boldsymbol{\xi})\right\}\tag{25}$$

其中，第1项$V_1^{(\mathrm{I})}(\boldsymbol{\eta})$是基于短波观测信号的最大似然估计函数，它仅与$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$有关，表达式为

$$V_1^{(\mathrm{I})}(\boldsymbol{\eta})=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}||\boldsymbol{x}_k(t_n)-\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)\boldsymbol{s}_k(t_n)||_2^2\tag{26}$$

式(25)第2项$V_1^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})$是基于卫星观测信号的最大似然估计函数，它与所有未知参数有关，表达式为

$$V_1^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}||\boldsymbol{y}_{k'}-\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})\boldsymbol{\beta}_{k'}||_2^2\tag{27}$$

式(25)第3项$V_2(\boldsymbol{\xi})$是基于星历观测矢量的最大似然估计函数，仅与星历参数有关的代价函数，其表达式为

$$V_2(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}\sum_{k'=1}^{3}\left\|\boldsymbol{Q}_{k'}^{-1/2}\left(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'}\right)\right\|_2^2\tag{28}$$

针对上述优化问题，鉴于待优化参数数量较多类型较复杂，下面将首先对代价函数进行参数去冗余的“降维”处理，然后设计一种交替迭代算法进行求解。

3.2 交替迭代优化求解

本节将针对式(25)构建的协同直接定位优化模型进行“降维”处理。首先，由式(27)可以看出，代价函数第1项$V_1(\boldsymbol{\eta})$是关于短波信号复包络矢量$\boldsymbol{s}_k(k=1,2,\cdots,K)$的二次函数，代价函数第2项$V_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})$是关于卫星复传播系数矢量$\boldsymbol{\beta}_{k'}(k'=1,2,3)$的二次函数，因此它们的最优闭式解能够直接获得。采用嵌入式的思想分别通过最小化$V_1(\boldsymbol{\eta})$与$V_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})$得到关于$\boldsymbol{s}_k(k=1,2,\cdots,K)$与$\boldsymbol{\beta}_{k'}(k'=1,2,3)$的最大似然估计闭式表达式为

$$\hat{\boldsymbol{s}}_k(t_n)=\left(\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{H}}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)\right)^{-1}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{H}}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)\boldsymbol{x}_k(t_n)\quad(k=1,2,\cdots,K;n=1,2,\cdots,N)\tag{29}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k'}=\left(\boldsymbol{\Phi}_{k'}^{\mathrm{H}}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{k'}^{\mathrm{H}}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})\boldsymbol{y}_{k'}\quad(k'=1,2,3)\tag{30}$$

将$\hat{\boldsymbol{s}}_k(t_n)$ $(k=1,2,\cdots,K;\ n=1,2,\cdots,N)$与$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k'}$ $(k'=1,2,3)$的最大似然估计闭式表达式分别代入式(18)与式(19)中，得到关于代价函数$V_1^{(\mathrm{I})}(\boldsymbol{\eta})$与$V_1^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})$的“降维”优化模型：

$$V_1^{(\mathrm{I})}(\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}})=\frac{N}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)]\hat{\boldsymbol{R}}_k\right\}\tag{31}$$

$$V_1^{(\mathrm{II})}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})]\boldsymbol{y}_{k'}\tag{32}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{R}}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_k(t_n)\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{H}}(t_n)$，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}=[\boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\psi}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\psi}_K^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

将式(31)与式(32)代回优化模型式(25)，可以得到仅关于$\tilde{\boldsymbol{p}}$,$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$与$\boldsymbol{\zeta}$的最大似然优化模型，即

$$\begin{aligned}&\left\{\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\zeta}\right\}\\&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\zeta}}V\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\zeta}\right)\\&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\zeta}}\left\{V_1^{(\mathrm{I})}\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right)+V_1^{(\mathrm{II})}\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\zeta}\right)+V_2(\boldsymbol{\xi})\right\}\\&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\zeta}}\left\{\frac{N}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)]\hat{\boldsymbol{R}}_k\right\}\right.\\&\quad+\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'})]\boldsymbol{y}_{k'}\\&\quad\left.+\frac{1}{2}\sum_{k'=1}^{3}\left\|\boldsymbol{Q}_{k'}^{-1/2}(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'})\right\|_2^2\right\}\end{aligned}\tag{33}$$

根据代价函数的代数特征，将待优化参量分成3类：第1类是多目标位置矢量$\tilde{\boldsymbol{p}}$，第2类是多目标的短波到达俯仰角参数$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$，第3类是卫星星历参数$\boldsymbol{\zeta}$。在每一轮迭代中均对这3类参量进行交替优化，即首先在保持$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$与$\boldsymbol{\zeta}$不变的情况下，完成对$\tilde{\boldsymbol{p}}$的优化；然后在保持$\tilde{\boldsymbol{p}}$与$\boldsymbol{\zeta}$不变的情况下，实现对$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$的优

化；最后在保持$\tilde{\boldsymbol{p}}$与$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$不变的情况下，实现对$\boldsymbol{\zeta}$的优化，如此继续直至收敛则停止迭代。下面依次给出每一轮迭代中3类参数的具体更新方法。

3.2.1 目标位置矢量参数更新

本节将介绍对目标位置参数的更新过程。根据前述“降维”优化模型，目标位置参数$\tilde{\boldsymbol{p}}$与短波观测信号、卫星观测信号的代价函数项有关，即

$$V_1\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\xi}\right)=V_1^{(\mathrm{I})}\left(\boldsymbol{\eta},\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right)+V_1^{(\mathrm{II})}\left(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}\right) \tag{34}$$

令$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(\mathrm{a})}$与$\boldsymbol{\xi}^{(\mathrm{a})}=[\boldsymbol{\xi}_1^{(\mathrm{a})\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_2^{(\mathrm{a})\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_3^{(\mathrm{a})\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$分别表示上一轮更新得到的俯仰角参数与星历参数，因此对$\tilde{\boldsymbol{p}}$的更新可通过求解如下优化问题得到

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{p}}&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{p}}}V_1\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(\mathrm{a})},\boldsymbol{\xi}^{(\mathrm{a})}\right)\\&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{p}}}\left\{\frac{N}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k^{(\mathrm{a})}\right)\right]\hat{\boldsymbol{R}}_k\right\}\right.\\&\left.+\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\boldsymbol{y}_{k'}\right\}\end{aligned} \tag{35}$$

式(35)是一个多维优化问题，本节考虑采用交替投影(Alternating Projection, AP)方法[25]对其进行迭代求解。AP方法将所有未知参数解耦为多组参数，再通过迭代对其依次求解，从而将高维非线性优化转化为多个低维优化问题。

根据AP算法的思想，在对某个目标辐射源位置$\boldsymbol{p}_q(q=1,2,\cdots,Q)$进行迭代更新中，其他目标辐射源位置$\tilde{\boldsymbol{p}}_{(q)}=[\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{p}_{q-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_{q+1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{p}_Q^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$保持不变。根据式(35)，对目标辐射源位置$\boldsymbol{p}_q(q=1,2,\cdots,Q)$的第$i$次迭代估计可以通过求解如下优化问题得到：

$$\hat{\boldsymbol{p}}_q^{(i)}=\arg\max_{\boldsymbol{p}}V_{1,q}(\boldsymbol{p}) \tag{36}$$

其中，

$$\begin{aligned}V_{1,q}(\boldsymbol{p})=&\frac{N}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\right.\right.\\&\left.\left.\boldsymbol{b}_k\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\psi}_{k,q}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\hat{\boldsymbol{R}}_k\right\}\\&+\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right.\\&\left.\cdot\,\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\boldsymbol{y}_{k'}\end{aligned} \tag{37}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}=[\psi_{k,1}\ \psi_{k,2}\cdots\psi_{k,(q-1)}\ \psi_{k,(q+1)}\cdots\psi_{k,Q}]^{\mathrm{T}}$，其他矩阵与矢量表达式为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\\&=\left[\boldsymbol{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{p}}_1^{(i-1)},\psi_{k,1}^{(\mathrm{a})}\right)\cdots\boldsymbol{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{q-1}^{(i-1)},\psi_{k,(q-1)}^{(\mathrm{a})}\right)\right.\\&\left.\boldsymbol{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{q+1}^{(i-1)},\psi_{k,(q+1)}^{(\mathrm{a})}\right)\cdots\boldsymbol{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{p}}_Q^{(i-1)},\psi_{k,Q}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)=&\left[\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k',1}\left(\hat{\boldsymbol{p}}_1^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}_{10}'\cdots\right.\\&\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k',(q-1)}\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{q-1}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\\&\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}_{(q-1)0}'\cdots\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k',(q+1)}\\&\cdot\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{q+1}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}_{(q+1)0}'\cdots\\&\left.\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k',Q}\left(\hat{\boldsymbol{p}}_Q^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}_{Q0}'\right]\end{aligned} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p}_q,\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)=\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_{k',q}(\boldsymbol{p}_q,\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}_{q0}' \tag{40}$$

根据优化模型(36)，利用附录A的推导可知，对$\boldsymbol{p}_q(q=1,2,\cdots,Q)$的第$i$次迭代估计为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{p}}_q^{(i)}=\arg\max_{\boldsymbol{p}}&\left\{\frac{N}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})}\right)\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_k\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{b}_k\left(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})}\right)}{\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})})\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})})\right]\cdot\boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})})}\right.\\&\left.+\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}\frac{\boldsymbol{\phi}_{k'}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{y}_{k'}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)}{\boldsymbol{\phi}_{k'}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)}\right\}\end{aligned} \tag{41}$$

通过在目标经纬度区域内进行二维网格搜索式(41)的最大值即得到$\hat{\boldsymbol{p}}_q^{(i)}$，接着利用相同的方式求解其余各个目标辐射源位置的第i次迭代估计结果$\hat{\boldsymbol{p}}_r^{(i)}(r\neq q)$，如此反复迭代直至式(35)中代价函数$V_1(\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(\mathrm{a})},\boldsymbol{\xi}^{(\mathrm{a})})$收敛。AP迭代算法收敛得到的多个目标辐射源位置估计即为本轮交替迭代的更新值，将其记为$\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})}=[(\tilde{\boldsymbol{p}}_1^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}\ (\tilde{\boldsymbol{p}}_2^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}\ \cdots\ (\tilde{\boldsymbol{p}}_Q^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

3.2.2 短波俯仰角参数更新

本节将对短波俯仰角参数进行更新，根据代价函数式(33)，多目标辐射的短波信号到达俯仰角参数$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$仅与代价函数的第1项有关，那么关于$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$的最大似然估计为

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}V_1^{(\mathrm{I})}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right)\\&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k\right)\right]\hat{\boldsymbol{R}}_k\right\}\end{aligned} \tag{42}$$

由于目标辐射的短波信号到达各短波阵列的俯仰角相互独立，可将式(42)中的代价函数拆分为K个子函数，即

$$V_1^{(\mathrm{I})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\tilde{\boldsymbol{\psi}})=\sum_{k=1}^{K}v_k^{(\mathrm{I})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k) \tag{43}$$

其中，

$$v_k^{(\mathrm{I})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k)=\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k)]\hat{\boldsymbol{R}}_k\right\}\quad k=1,2,\cdots,K \tag{44}$$

因此，能够将$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$的更新问题解耦为对$\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\cdots,\boldsymbol{\psi}_K$分别进行更新：

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_k=\arg\min_{\boldsymbol{\psi}_k}v_k^{(\mathrm{I})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k)\ (k=1,2,\cdots,K) \tag{45}$$

由于本文解决的是多个目标辐射源的定位问题，此时针对每个短波观测站俯仰角参数$\boldsymbol{\psi}_{k_1}$的估计仍是一个高维非线性优化问题，这里采用Newton型数值迭代方法对$\boldsymbol{\psi}_{k_1}$进行更新，对$\boldsymbol{\psi}_{k_1}$的第i次Newton型迭代估计可以通过以下的优化问题得到：

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_k^{(i+1)}=\hat{\boldsymbol{\psi}}_k^{(i)}-\mu^i\boldsymbol{H}_k^{-1}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\psi}}_k^{(i)}\right)\boldsymbol{g}_k\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\psi}}_k^{(i)}\right)\quad(k=1,2,\cdots,K) \tag{46}$$

其中，i表示迭代次数，$0<\mu\le 1$表示迭代步长因子，$\boldsymbol{g}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k)$和$\boldsymbol{H}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k)$分别表示代价函数$v_k^{(\mathrm{I})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\psi}_k)$关于$\boldsymbol{\psi}_k$的梯度矢量和Hessian矩阵，他们的具体表达式见附录B。

利用式(46)迭代收敛得到的不同短波观测站的俯仰角参数的估计即为本轮交替迭代的更新值，将更新得到的俯仰角矢量记为$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(\mathrm{b})}=[(\boldsymbol{\psi}_1^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\psi}_2^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}\cdots(\boldsymbol{\psi}_K^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

3.2.3 星历参数更新

本小节将对星历参数进行更新，根据代价函数式(33)，星历参数$\boldsymbol{\xi}$与代价函数的第2项、第3项有关，那么关于$\boldsymbol{\xi}$的最大似然估计为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\xi}}&=\arg\min_{\boldsymbol{\zeta}}\left\{V_1^{(\mathrm{II})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\zeta})+V_2(\boldsymbol{\xi})\right\}\\&=\arg\min_{\boldsymbol{\zeta}}\left\{\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})]\boldsymbol{y}_{k'}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}\sum_{k'=1}^{3}\left\|\boldsymbol{Q}_{k'}^{-1/2}\left(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'}\right)\right\|_2^2\right\}\end{aligned} \tag{47}$$

由于不同卫星的星历误差相互独立，这里将代价函数$V_1^{(\mathrm{II})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\zeta})+V_2(\boldsymbol{\xi})$拆分为分别与3个卫星有关的子函数，即

$$V_1^{(\mathrm{II})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\zeta})+V_2(\boldsymbol{\xi})=\sum_{k'=1}^{3}v_{k'}^{(\mathrm{III})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'}) \tag{48}$$

其中，

$$\begin{aligned}v_{k'}^{(\mathrm{III})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})&=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})]\boldsymbol{y}_{k'}\\&\quad+\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Q}_{k'}^{-1/2}\left(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'}\right)\right\|_2^2\\&=\left\|\sigma_{\mathrm{n}}'^{-1}\left(\boldsymbol{y}_{k'}-\boldsymbol{\Pi}[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})]\boldsymbol{y}_{k'}\right)\right\|_2^2\\&\quad+\left\|(2\boldsymbol{Q}_{k'})^{-1/2}\left(\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}-\boldsymbol{\xi}_{k'}\right)\right\|_2^2\end{aligned} \tag{49}$$

因此，对卫星位置参数的更新可以通过求解下述3个子优化问题来实现：

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}=\arg\min_{\boldsymbol{\xi}_{k'}}v_{k'}^{(\mathrm{III})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})\ (k'=1,2,3) \tag{50}$$

为便于推导，令，

$$\boldsymbol{r}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})=\begin{bmatrix}\sigma'^{-1}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Pi}[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})]\boldsymbol{y}_{k'}\\(2\boldsymbol{Q}_{k'})^{-1/2}\boldsymbol{\xi}_{k'}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k'}=\begin{bmatrix}\sigma'^{-1}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{y}_{k'}\\(2\boldsymbol{Q}_{k'})^{-1/2}\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}\end{bmatrix}$$

则$v_{k'}^{(\mathrm{III})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{a})},\boldsymbol{\xi}_{k'})$可以表示为非线性最小二乘形式：

$$v_{k'}^{(\mathrm{III})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})=\left\|\tilde{\boldsymbol{y}}_{k'}-\boldsymbol{r}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})\right\|_2^2\ (k'=1,2,3) \tag{51}$$

式(51)是一个非线性最小二乘问题，这里采用经典的Taylor级数迭代方法[26]对其进行求解。根据附录C所给出的推导过程，可以得到针对$\boldsymbol{\xi}_{k'}$的Taylor级数迭代公式为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i+1)}=&\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}+\mathrm{Re}^{-1}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right)^{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right\}\\&\cdot\mathrm{Re}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right)^{\mathrm{H}}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k'}-\boldsymbol{r}_{k'}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right)\right\}\\&(k'=1,2,3)\end{aligned} \tag{52}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})}{\partial\boldsymbol{\xi}_{k'}^{\mathrm{T}}}$。将Taylor级数迭代收敛得到的星历参数矢量记为$\boldsymbol{\xi}^{(\mathrm{b})}=[(\boldsymbol{\xi}_1^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}_2^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}_3^{(\mathrm{b})})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，即为本轮交替迭代的星历参数更新值。

综上所述，通过利用式(41)、式(46)与式(52)依次对3类参数(即目标辐射源位置矢量$\tilde{\boldsymbol{p}}$、短波俯仰角参数$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$及星历参数$\boldsymbol{\zeta}$)进行交替迭代更新，直至式(33)中代价函数$V(\tilde{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\zeta})$收敛，即实现了对星历误差条件下联合卫星与短波信号的多目标协同定位。上述算法的实现流程图描绘如下。

下面对本文算法进行以下3点说明。

(1) 由于本文求解的是一个高度非线性、非凸的优化问题，本文设计了交替迭代优化方法，该方法与其他迭代类算法相同，能够保证每一次迭代后代价函数的值不会增大，但优化结果可能收敛到局

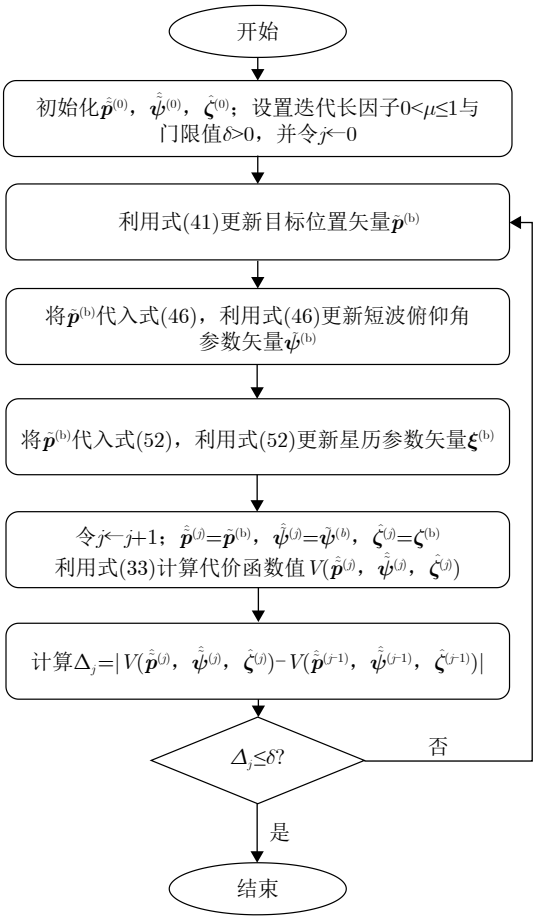


图 3 本文算法流程图

Fig. 3 Flow diagram of the proposed method

部极小值点，因而一个好的初始值对算法的收敛性和最终性能至关重要。本文可采用如下策略进行参数初始化，后续仿真结果验证了该初始化策略的有效性：①利用基于短波方位角观测参数或基于三星时差观测参数的伪线性最小二乘(Pseudo-Linear Weighted Least Square, PLWLS)两步定位算法[8]获得Q个目标位置矢量的初始值$\hat{\boldsymbol{p}}_q^{(0)}=[\hat{\alpha}_q^{(0)},\hat{\gamma}_q^{(0)}]^{\mathrm{T}}$ $(q=1,2,\cdots,Q)$；②利用多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)测向算法[27]进行二维角度估计得到各短波观测站俯仰角的初始值$\hat{\boldsymbol{\psi}}_k^{(0)}(k=1,2,\cdots,K)$；③将包含误差的卫星星历观测值$\breve{\boldsymbol{\xi}}_{k'}(k'=1,2,3)$作为卫星位置矢量的初始值$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(0)}(k'=1,2,3)$。

(2) 本文算法在两个频段数据关联和目标个数估计完成的前提下，重点研究多目标精准定位与星历误差的抑制。在实际侦察定位场景中，可通过以下方式实现数据关联与目标数量估计[28]：短波侦察定位系统与卫星侦察定位系统先独立通过辐射源射频指纹特征识别与定位等算法，完成辐射源个体识别、目标数量预估计与定位，然后利用辐射源个体识别结果或者利用特定关联准则对两个系统的定位结果进行统一的空时关联，从而完成两个频段之间的数据关联和目标辐射源数量估计，这是本文联合定位算法的前置基础流程。

(3) 本文所提卫星与短波信号协同直接定位方法，其实质利用了K个短波观测站的方位角与三星时差中所包含的位置信息。对于每个目标辐射源，可建立K个方位角与2个时差定位方程。由于本文针对地面辐射源进行定位(目标高程先验已知)，未知辐射源地理坐标参数的维度为2，按“未知参数个数≤定位方程个数”的可测性原则分析，此时要求短波观测站个数$K\geq 0$，即仅由三星时差定位系统即能够实现地面目标定位；当针对高程未知的辐射源进行定位时(即目标位置参数维度为3)，此时要求短波观测站个数$K\geq 1$，即该协同定位系统除三星时差定位系统，还需要至少1个短波地面观测站。

3.3 计算复杂度分析

本节将针对所提算法的计算复杂度进行分析，本文采取交替迭代优化求解，其计算量主要包括3个求解阶段：目标位置矢量参数更新、短波俯仰角参数更新以及星历参数更新。为表示简洁，假设短波观测站与卫星地面站接收信号的样本点数均为N，每个短波观测站的阵列阵元个数均为M。以实数乘法次数作为计算复杂度的统计指标，根据3个求解阶段中参数迭代的更新公式(见式(41)、式(46)与式(52))，表2列出了本文算法在每一求解阶段中的计算复杂度，其中N_p代表目标位置搜索的网格个

表 2 本文算法的计算复杂度

Tab. 2 Computational complexity of the proposed algorithm

求解阶段	计算复杂度
目标位置矢量参数更新	$O_1=O\left(4KM^2N+12N^2+\left(\frac{8}{3}Q^4K+12Q^3KM+12Q^2N\log_2N+48QN^2\right)N_pN_{\mathrm{iter}}^{(\mathrm{I})}\right)$
短波俯仰角参数更新	$O_2=O\left(\left(\frac{10}{3}Q^3K+28Q^2KM+8QKM^2\right)N_{\mathrm{iter}}^{(\mathrm{II})}\right)$
星历参数更新	$O_3=O\left(\left(24Q^3+108Q^2N+12QN\log_2N+36N^2\right)N_{\mathrm{iter}}^{(\mathrm{III})}\right)$
整体交替迭代	$O_{\mathrm{total}}=(O_1+O_2+O_3)N_{\mathrm{iter}}$

数，$N_{\text{iter}}^{(\text{I})}$，$N_{\text{iter}}^{(\text{II})}$，$N_{\text{iter}}^{(\text{III})}$分别表示目标位置矢量参数更新、短波俯仰角参数更新、星历参数更新所需的迭代次数，本文算法的计算量即为3个阶段计算量之和与交替迭代收敛所需迭代次数N_{iter}的乘积。需要注意的是，在目标位置矢量参数更新阶段与星历参数更新阶段，都需要计算矩阵$\boldsymbol{\Phi}_k(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\xi}_k)$(见式(14))，其中矢量与矩阵$\boldsymbol{F}$、共轭转置矩阵$\boldsymbol{F}^{\text{H}}$相乘可通过快速傅里叶变换、快速傅里叶逆变换计算实现。

从表2可以看出：(1)本文算法的整体计算量$O_{\text{total}}=(O_1+O_2+O_3)N_{\text{iter}}$随着目标数量$Q$、短波观测站数量$K$、目标位置网格个数$N_p$、短波观测阵列阵元个数$M$、样本点数$N$的增大而变大，且与收敛所需迭代次数有关；(2)整体计算量与Q^4成正比，说明目标数量对本文计算复杂度的影响较大；(3)当目标区域范围一定时，目标位置网格个数N_p越大，说明网格搜索越精细，此时计算量越大，这体现了估计精度和计算量之间的矛盾，可采用网格粗搜+细搜的策略来对此平衡。

4 仿真结果与分析

4.1 仿真场景与参数设置

本节将通过数值仿真验证本文算法在星历误差存在下的性能优势。仿真采用3个短波地面观测站和3颗卫星进行联合定位。其中，短波地面观测站的经度分别为60.2°E, 70.5°E和72.2°E，纬度分别为34.0°N, 38.8°N和26.5°N。每个短波观测站均安装一个均匀圆阵，阵元个数均为20，半径波长比为4.2，假设其阵列流形精确已知；3颗卫星的经度分别为124.23°E, 118.35°E和120.87°E，纬度分别为30.57°N, 29.19°N和32.65°N，鉴于低轨卫星的轨道高度低、传输时延小、机动性强，更适合战术机动超视距定位场景，已广泛应用于战术应急通信、超视距侦察补盲场景[29]，仿真中将卫星轨道高度分别设置为1000 km, 1000 km和1200 km，卫星地面站的经纬度均为110.3°E和25.7°N。不失一般性，假设目标区域内存在$Q=2$个地面辐射源同时或短时内发射短波信号和卫星信号，在此时间内短波信号通过天波传输被3个短波观测站接收，卫星信号被3颗卫星覆盖并转发至卫星地面站。短波信号为窄带信号，载波频率为15.25 MHz；考虑到P波段波长较长，衍射能力强，常用于对非合作信号的远距离隐蔽侦察，因此仿真假设卫星信号波段为P波段，载波频率为300 MHz，带宽为50 kHz，基带采样频率为75 kHz。两个地面辐射源的经度分别为95.2°E和92.7°E，纬度分别为31.4°N和19.6°N。上述短波观测站、卫星地面站以及地面辐射源的高程均在0～500 m，并假设高程参数已知。短波观测站的均匀圆阵阵元天线、卫星接收与发射天线以及卫星地面站的接收天线均为全向天线，假设目标辐射信号到达各短波观测站与卫星地面站的传播路径损耗均与路径长度的平方成正比。观测噪声与星历误差均服从零均值的高斯分布，星历误差协方差矩阵为$\boldsymbol{Q}_k=\sigma_\xi^2\boldsymbol{I}_3(k=1,2,3)$，其中$\sigma_\xi$为星历误差的标准差，用以衡量星历误差的大小。

下面分别针对无电离层扰动影响和有电离层扰动影响的两种情况进行仿真测试，每组蒙特卡罗仿真次数均为200次，以定位均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)为性能指标来对本文所提算法与现有算法进行对比。对比算法包括文献[8]中卫星与短波协同两步定位算法、文献[9]中基于角度信息的短波多站直接定位算法、文献[17]中基于两步加权最小二乘的卫星时差两步定位算法，其中卫星与短波协同两步定位算法[8]采用最优加权融合，但未考虑星历误差的校正，基于两步加权最小二乘的卫星时差两步定位算法[17]利用多个目标所受星历误差影响相同这一约束条件，进行误差校正。上述算法的前置条件均假设目标辐射源个数先验已知(可利用本文2.2节讨论的方法估计得到)，所用到的初始值均采用2.2节给出的初始化策略得到，经纬度网格搜索均通过先粗搜后细搜的方式实现，其中粗搜的步长为10^{-4}度，细搜的步长为10^{-5}度，算法迭代收敛门限值设置为10^{-7}。为了纯粹对比定位算法本身的解算精度与鲁棒性，本文参照主流文献做法，仿真中均假设上述两步定位算法的中间观测参数与各目标的数据关联正确，不存在额外的数据关联误差。需要说明的是，该前提相当于弱化了本文协同直接定位算法无须中间参数匹配、天然避免关联错误的优势，在真实多目标场景中，两步定位难以避免关联错误问题，此时本文算法相较两步定位的实际性能优势会更为显著。

表3给出了本节仿真所用的系统参数，参照现有研究的常用仿真参数设计方案，本文仿真中将信噪比与星历误差标准差等场景条件参数设置为整数取值并等间隔变化，这些参数量级均处于无源侦察场景中常用的取值区间内，且便于清晰对比各算法的定位性能变化趋势与鲁棒性差异。

4.2 无电离层扰动影响下的定位结果与分析

本节研究在没有电离层扰动的影响下，本文所提算法与对比算法在不同场景下的定位性能，其中信噪比定义为短波观测站或卫星地面站接收信号功率(包含了发射信号EIRP、接收天线增益以及传播路径损耗的影响)与观测噪声功率的比值。

表 3　仿真系统参数列表

Tab. 3　Setting of simulation parameters

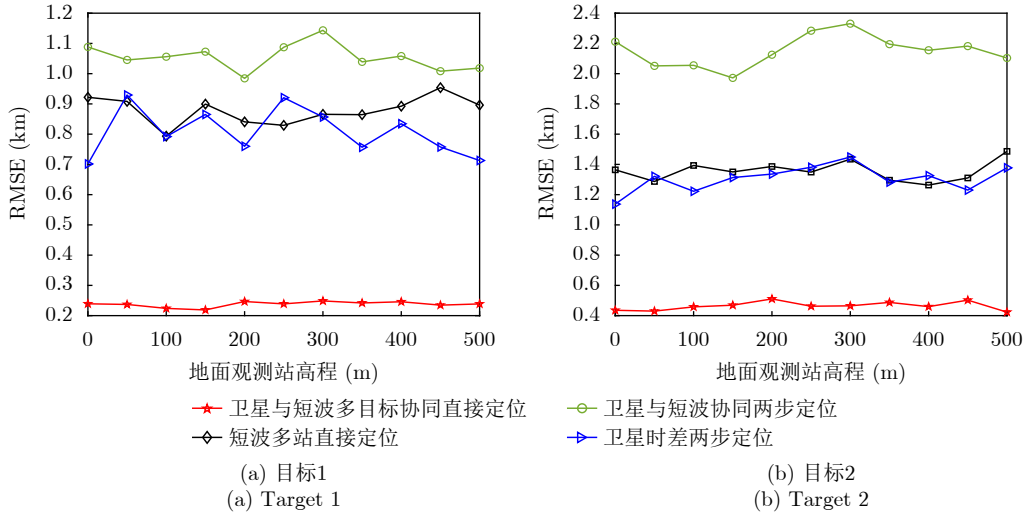
参数	参数设置
短波观测站数量	3
短波观测站1坐标	经度60.2°E，纬度34.0°N，高程范围[0, 500 m]
短波观测站2坐标	经度70.5°E，纬度38.8°N，高程范围[0, 500 m]
短波观测站3坐标	经度72.2°E，纬度26.5°N，高程范围[0, 500 m]
短波信号载波频率	15.25 MHz
卫星数量	3
卫星1坐标	经度124.23°E，纬度30.57°N，轨道高度1000 km
卫星2坐标	经度118.35°E，纬度29.19°N，轨道高度1000 km
卫星3坐标	经度120.87°E，纬度32.65°N，轨道高度1200 km
卫星地面站坐标	经度110.3°E，纬度25.7°N，高程范围[0, 500 m]
卫星信号载波频率	300 MHz
卫星信号带宽	50 kHz
卫星信号基带采样频率	75 kHz
目标数量	2
目标1坐标	经度95.2°E，纬度31.4°N，高程范围[0, 500 m]
目标2坐标	经度92.7°E，纬度19.6°N，高程范围[0, 500 m]
接收信噪比范围	[–10 dB, 30 dB]
高斯分布星历误差标准差范围	[50 m, 500 m]
样本点数范围	[50, 500]
蒙特卡罗次数	200
算法迭代收敛门限	10^{-7}

4.2.1　观测站与辐射源高程的影响

考虑到实际短波地面观测站、卫星地面站以及地面辐射源的海拔(即高程)可能会分布在几百米范围内，因此首先研究短波观测站与卫星地面站的不同高程以及目标的不同高程对算法定位性能的影响。假设信噪比为20 dB，星历误差的标准差σ_ξ为200 m，每个短波观测站与卫星地面站采集到的样本点数均为100。固定地面目标的高程为0，令短波观测站与卫星地面站的高程从0变化至500 m，针对2个目标辐射源的定位RMSE曲线如图4所示；固定短波观测站与卫星地面站的高程为0，令地面目标的高程从0变化至500 m，相应的定位RMSE曲线如图5所示。从图4与图5的结果可以看出：(1)由于卫星与短波协同两步定位算法没有考虑星历误差的校正问题且此场景中星历误差较大，因此该算法定位精度最低，而本文算法协同了两种频段信号并挖掘了多目标观测中星历误差相同这一隐含约束条件，因此定位精度始终最高；(2)当短波观测站与卫星地面站以及地面目标的高程在0～500 m区间时，本文算法与对比算法的定位性能基本不随高程变化，这是因为本文假设目标高程已知，而0～500 m的高程变化对于目标与短波观测站的方位角、目标与卫星之间的时差变化影响不大，因此上述基于短波角度信息、基于卫星时差信息的定位算法的误差曲线只有轻微抖动，整体定位误差未呈现明显变化趋势。根据该仿真结果，不失一般性，后续仿真假设短波观测站、卫星地面站以及地面目标的高程均为0。

4.2.2　初始化策略的有效性验证

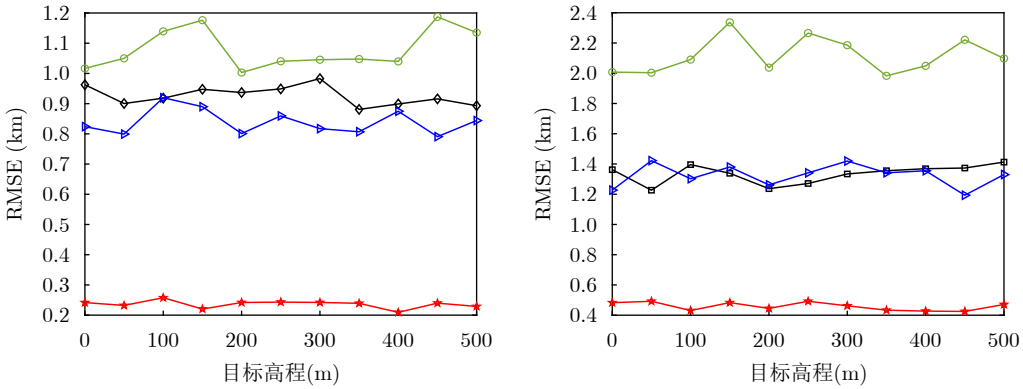
由于本文算法采用交替迭代优化求解，为了验证本文2.2节所给初始化策略的有效性，下面对该初始化策略下算法的收敛性能进行测试。图6画出了SNR分别为10 dB, 20 dB, 30 dB时归一化代价函



(a) 目标1　(a) Target 1　　(b) 目标2　(b) Target 2

图 4 定位均方根误差随地面观测站高程的变化曲线(无电离层扰动影响)

Fig. 4 The estimated RMSE curves versus height of HF observers and satellite ground stations in the absence of ionospheric disturbance



(a) 目标1 (a) Target 1　　(b) 目标2 (b) Target 2

图 5 定位均方根误差随目标高程的变化曲线(无电离层扰动影响)

Fig. 5 The estimated RMSE curves versus height of targets in the absence of ionospheric disturbance

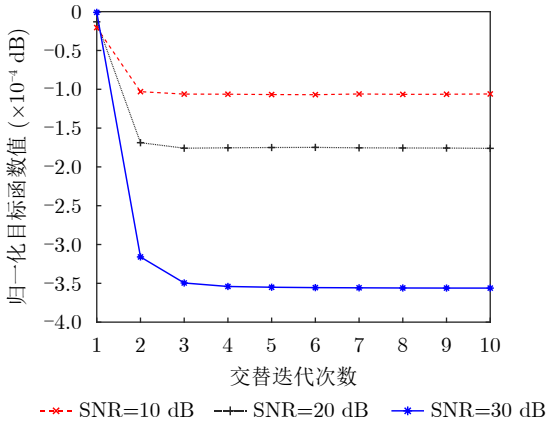


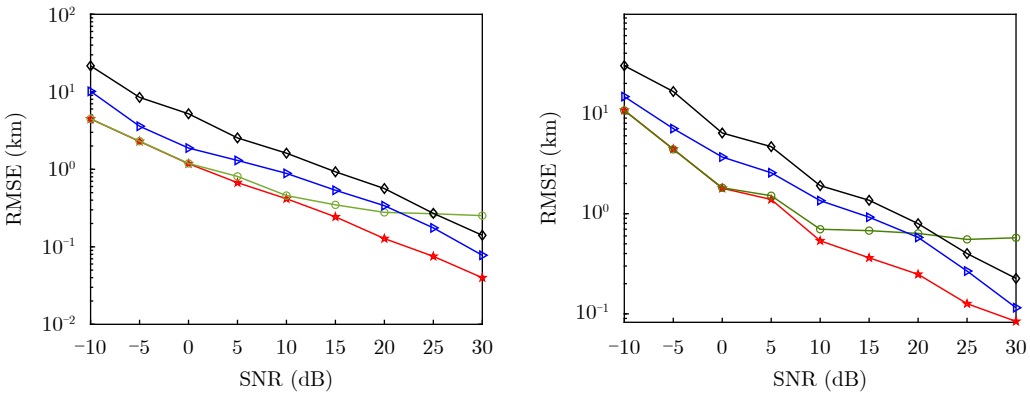
图 6 归一化目标函数值随交替迭代次数的变化曲线

Fig. 6 Curves of normalized values of objective function varying with the alternating iteration step

数值(即$V(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(j)},\hat{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}^{(j)},\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{(j)})/\max_r\{V(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(r)},\hat{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}^{(r)},\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{(r)})\}$)随交替迭代次数的变化曲线。结果显示：在不同信噪比条件下，利用本文所给的初始化策略，设计的交替迭代算法在5次迭代内可达到收敛，验证了初始化策略的有效性。

4.2.3 定位精度随信噪比的变化

将星历误差的标准差σ_ξ固定为50 m，假设每个短波观测站与卫星地面站采集到的样本点数均为100，令短波观测站和卫星地面站的接收信噪比从–10 dB变化至30 dB。在该条件下，分别统计本文所提的卫星与短波多目标协同直接定位算法和上述对比算法的定位RMSE，针对2个目标辐射源的定位RMSE曲线随信噪比的变化如图7所示，表4和表5



(a) 目标1 (a) Target 1　　(b) 目标2 (b) Target 2

图 7 定位均方根误差随信噪比的变化曲线(无电离层扰动影响)

Fig. 7 The estimated RMSE curves versus SNR in the absence of ionospheric disturbance

表 4　在SNR=–10 dB条件下本文算法与其他算法的定位误差性能对比(无电离层扰动影响)

Tab. 4　Comparison of RMSEs of the proposed algorithm with other algorithms when SNR=–10 dB in the absence of ionospheric disturbance

算法	目标1		目标2	
	RMSE (km)	RMSE降低(%)	RMSE (km)	RMSE降低(%)
卫星与短波多目标协同直接定位	4.4630	–	10.7485	–
卫星与短波协同两步定位	4.4834	0.4550	10.7759	0.2543
短波多站直接定位	21.6264	79.3632	30.0282	64.2053
卫星时差两步定位	10.1454	56.0096	14.7667	27.2112

表 5　在SNR=30 dB条件下本文算法与其他算法的定位误差性能对比(无电离层扰动影响)

Tab. 5　Comparison of RMSEs of the proposed algorithm with other algorithms when SNR=30 dB in the absence of ionospheric disturbance

算法	目标1		目标2	
	RMSE (km)	RMSE降低(%)	RMSE (km)	RMSE降低(%)
卫星与短波多目标协同直接定位	0.0399	–	0.0840	–
卫星与短波协同两步定位	0.2526	84.2043	0.5745	85.3786
短波多站直接定位	0.1409	71.6820	0.2256	62.7660
卫星时差两步定位	0.0778	48.7147	0.1152	27.0833

分别列出了信噪比为–10 dB和30 dB时各种算法对2个目标的定位RMSE值，并采用以下公式计算给出本文算法相比于对比算法的RMSE降低百分比：

$$\text{RMSE降低百分比} = \frac{\text{RMSE}_{\text{对比算法}} - \text{RMSE}_{\text{本文算法}}}{\text{RMSE}_{\text{对比算法}}} \times 100\% \tag{53}$$

图7、表4和表5中的定位结果显示：(1)在整个信噪比区间内，本文算法定位精度均明显优于基于单一频段的定位算法，体现了多频段联合定位的优势。在信噪比为–10 dB时，本文算法对目标1的定位误差较短波多站直接定位算法与卫星时差两步定位算法分别降低79.3632%与56.0096%，对目标2的定位误差较两种单一频段定位算法分别降低64.2053%与27.2112%。(2)本文所提算法、短波多站直接定位算法以及卫星时差两步定位算法的定位RMSE均随着信噪比的升高而减小，而卫星与短波协同两步定位算法在信噪比高于10 dB之后，定位误差没有下降趋势，其定位精度明显低于本文算法。这是由于本文算法与卫星时差两步定位算法均对星历误差进行了校正，短波多站直接定位算法不受星历误差的影响，而卫星与短波协同两步定位算法没有考虑星历误差的校正问题，因此随着信噪比的增加，星历误差对其定位性能的影响逐渐明显。当信噪比高达30 dB时，本文算法对两个目标的定位误差较未考虑星历误差校正的卫星与短波协同两步定位算法分别降低84.2043%与85.3786%。

4.2.4　定位精度随样本点数的变化

在信噪比为15 dB的条件下，固定星历误差的标准差σ_ξ为50 m，令每个短波观测站与卫星地面站采集到的样本点数从50变化至500，对本文算法与上述对比算法的定位RMSE进行统计，2个目标辐射源的定位结果如图8所示。观察图8中结果可知：(1)在整个样本点数区间内，本文算法定位精度均明显优于基于单一定位系统的定位算法，尤其在小样本点数条件下该定位优势更加明显。(2)本文算法、短波多站直接定位算法以及卫星时差两步定位算法的定位RMSE均随着样本点数的增大而逐渐降低，而卫星与短波协同两步定位算法由于没有对星历误差进行校正，其定位误差没有明显的下降趋势，因此随着样本点数的增多，本文算法较卫星与短波协同两步定位算法的定位性能提升更加显著，这体现了校正星历误差所带来的性能增益。

4.2.5　定位精度随星历误差大小的变化

在信噪比为15 dB的条件下，将每个短波观测站与卫星地面站采集到的样本点数固定为100，统计本文算法与上述对比算法的定位RMSE随星历误差标准差σ_ξ的变化，图9给出了当星历误差标准差σ_ξ从50 m到500 m变化过程中2个目标辐射源的定位RMSE曲线。图9中结果显示：短波多站直接定位算法由于不依赖星历参数，因此其定位RMSE不受星历误差的影响；卫星与短波协同两步定位算法

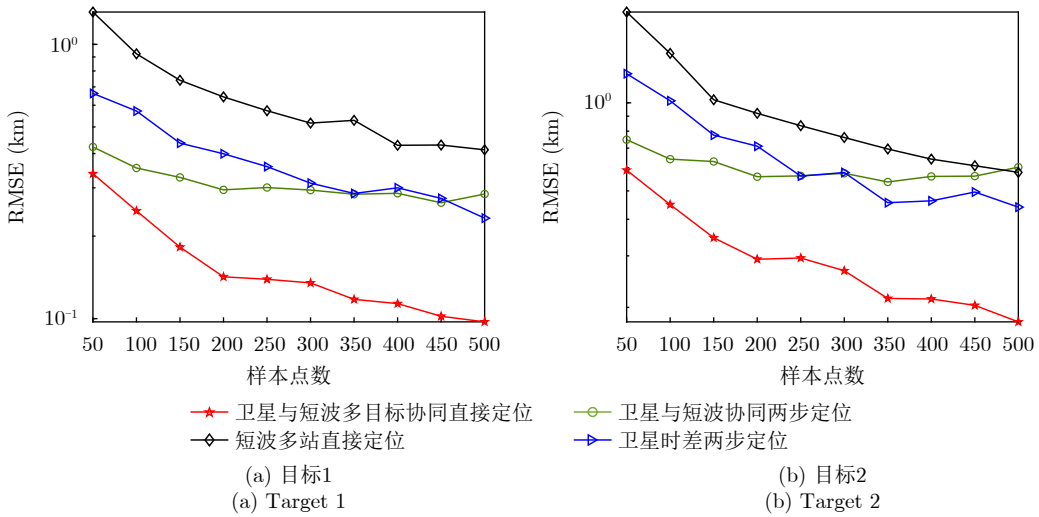


图 8 定位均方根误差随样本点数的变化曲线(无电离层扰动影响)

Fig. 8 The estimated RMSE curves versus sampling snapshot in the absence of ionospheric disturbance

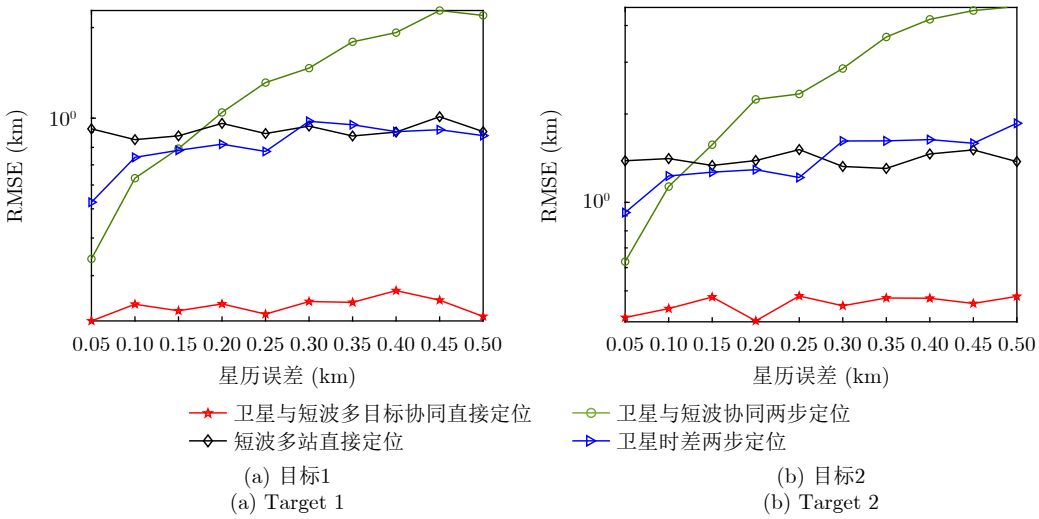


图 9 定位均方根误差随星历误差的变化曲线(无电离层扰动影响)

Fig. 9 The estimated RMSE curves versus standard deviation of satellite orbit errors in the absence of ionospheric disturbance

由于没有考虑星历误差的校正，其定位性能随着星历误差的增加而显著下降；卫星时差两步定位算法虽然对星历误差实现了校正，但是由于其定位结果依赖星历参数，因此其定位误差随星历误差的增加有所增大；本文算法由于联合了两种频段观测信号，且能够充分利用多目标位置参数与星历误差参数的耦合关联，因此其定位误差对星历误差最不敏感，这说明本文算法对星历误差具有较强的鲁棒性。

4.2.6 星历误差统计模型失配的影响

下面研究先验已知的星历误差协方差矩阵$\boldsymbol{Q}_k$与实际星历误差统计特性存在偏差(即模型失配)时，对算法性能的影响。鉴于星历误差标准差σ_ξ容易从大量观测数据中统计获得，而协方差矩阵$\boldsymbol{Q}_k$结构不易观测得到准确值，因此这里重点考虑先验协方差矩阵$\boldsymbol{Q}_k$与实际$\overline{\boldsymbol{Q}}_k$的结构存在偏差。假设实际的星历误差协方差矩阵为$\overline{\boldsymbol{Q}}_k=\sigma_\xi^2\boldsymbol{I}_3$ $(k=1,2,3)$，而先验已知的星历误差协方差矩阵为$\boldsymbol{Q}_k=\sigma_\xi^2\tilde{\boldsymbol{I}}_3(\rho)$，其中$\tilde{\boldsymbol{I}}_3(\rho)$表示对角线元素为1，非对角线元素为$\rho$的对称矩阵，$\rho$可以用来刻画先验星历误差统计模型失配的程度，即$\rho$越大则表示与实际星历误差统计特性偏差越大。在信噪比为20 dB的条件下，将星历误差的标准差σ_ξ固定为200 m，每个短波观测站与卫星地面站采集到的样本点数均为100，令ρ从0变化至0.9，对本文算法与上述对比算法的定位RMSE进行统计，2个目标辐射源的定位结果如图10所示。观察图10中结果可知：随着ρ增大，此时先验已知的星历误差协方差矩阵$\boldsymbol{Q}_k$与实际星历误差统计特性的偏差程度变大，卫星时差两步定位性能有所下降，说明该算法

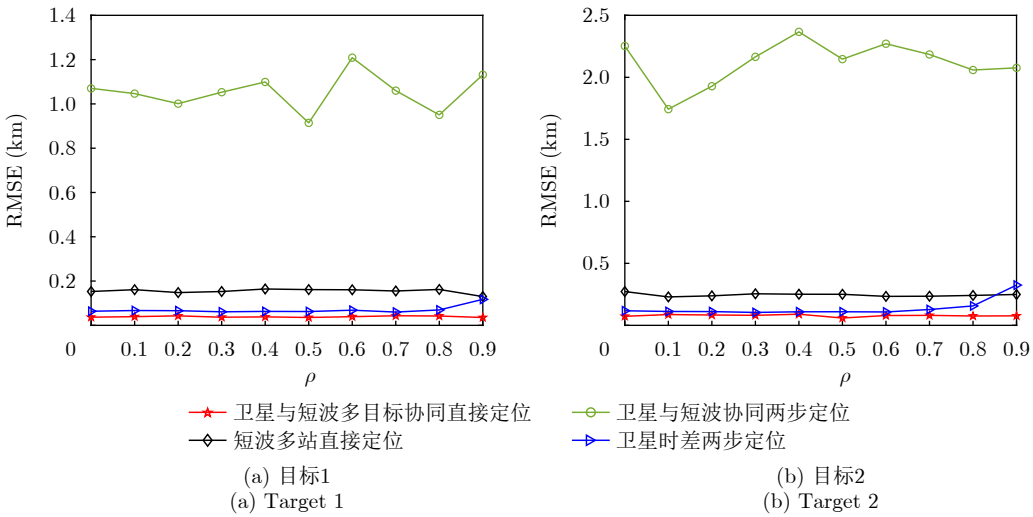


图 10 定位均方根误差随高斯分布星历误差与先验统计特性失配程度的变化曲线(无电离层扰动影响)

Fig. 10 The estimated RMSE curves versus mismatching degree of a priori statistical characteristics of Gaussian satellite orbit errors in the absence of ionospheric disturbance

对星历误差统计模型失配较为敏感；而本文算法的定位误差基本不受影响，始终保持最优的估计精度，说明本文算法在协同短波与卫星两种频段信号后，其星历误差的校正效果对星历误差统计模型失配场景的鲁棒性更强。

考虑在实际卫星定位中利用的卫星分为合作卫星与非合作卫星2大类，合作卫星可通过双向测控链路获取较为精准的观测数据，结合精密定轨算法，对其轨道摄动的修正更加及时，因此其星历误差通常较小；而非合作卫星的轨道参数往往基于历史数据递推，难以精确建模的摄动力影响显著，因而其星历误差会随时间持续累积、不断增大[30]。受递推中误差累积影响，非合作卫星的星历误差可能不再服从标准高斯分布，呈现出非高斯、重尾分布特性。为了研究非高斯星历误差对本文高斯分布假设的影响，这里参照文献[31]中的仿真设置，采用高斯混合模型(Gaussian Mixture Model, GMM)拟合该类重尾非高斯星历误差$\Delta\boldsymbol{\xi}_k=\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_k-\boldsymbol{\xi}_k$，该分布的模型表达式如下：

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_k\sim 0.9\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\sigma_\xi^2\boldsymbol{I}_3)+0.1\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\sigma_\xi'^2\boldsymbol{I}_3)\ (k=1,2,3) \tag{54}$$

其中，$\sigma_\xi'>\sigma_\xi$；第1项主分量为零均值、较小方差的高斯分布，用于模拟先验已知的小幅随机星历误差；第2项次分量为零均值、大方差的高斯分布，用于表征轨道递推累积引发的大幅随机星历误差，其中σ_ξ'可以用来刻画非高斯星历误差的拖尾强度，以及与先验高斯统计特性的失配程度。

在信噪比为20 dB的条件下，假设每个短波观测站与卫星地面站采集到的样本点数均为100，将主分量标准差σ_ξ固定为200 m，令次分量标准差σ_ξ'从400 m变化至4000 m，以此模拟非合作卫星的星历误差随时间累积增大的变化规律。统计本文算法与上述对比算法的定位RMSE，对2个目标辐射源的定位结果如图11所示。观察图11中结果可知：(1)由于卫星与短波协同两步定位算法及短波多站直接定位算法未利用星历误差的统计先验信息，因此虽然它们的定位精度有限，但是并未受非高斯星历重尾误差的扰动影响。(2)随着次分量标准差σ_ξ'增大，星历误差的重尾特征加剧，与高斯先验模型的失配程度加深，本文算法与卫星时差两步定位算法的精度均出现一定下降；但相较于卫星时差两步定位算法，本文算法由于融合短波与卫星双频段信号，能够互补观测信息，因而在非高斯重尾星历误差场景下具备更强的鲁棒性。(3)在次分量标准差较小、非高斯特性较弱的σ_ξ'<1000 m区间内，本文算法定位性能能够保持稳定，但随着拖尾强度逐步凸显、非高斯误差特性增强，本文算法定位精度出现明显下降。该结果说明，利用非合作卫星定位时应尽量采用临近历史数据递推，以抑制星历误差累积、保证定位精度需求，若无法获取临近时间的观测数据进行轨道递推，后续工作需考虑对非高斯星历误差的校正研究。

4.3 电离层扰动影响下的定位结果与分析

本节研究在电离层扰动影响下所提算法与对比算法的定位性能对比。实际的电离层扰动通常具有系统性、频率相关性和时空相关性等复杂特征，如前文所述，对电离层扰动的精准建模是一个兼具理论深度与工程复杂度的独立研究课题，因此本节简

化了电离层扰动模型。假设在电离层扰动影响下，短波天波传播的方位角偏差为[–0.1°, 0.1°]范围内均匀分布的随机误差，卫星时延误差服从零均值、标准差为1 μs的高斯分布。需要说明的是，卫星转发器时延抖动[32]和地面站时间同步误差[28]通常在十几ns与几十ns量级，因此该仿真中卫星时延误差已经覆盖了卫星转发器时延抖动和地面站时间同步误差的影响。

4.3.1 定位精度随信噪比的变化

在与3.2节相同的观测站与目标几何构型下，将星历误差的标准差σ_ξ固定为200 m，令每个短波观测站与卫星地面站采集到的样本点数均为100，分别统计本文算法和对比算法的定位RMSE随接收信噪比变化的结果，相应的误差曲线如图12所示。对比图12与图7中的定位结果可以发现：(1)当短波定位系统与卫星定位系统均受到电离层扰动影响时，随着信噪比的增大，短波多站直接定位算法、卫星时差两步定位算法以及卫星与短波协同定位方法的定位精度难以继续提升，这是因为此时两种频段的定位模型均出现失配，模型失配在高信噪比条件下的影响更为明显。(2)无论是否受到电离层扰动的影响，本文算法的定位精度均在整个信噪比区间内比其他算法更高。表6和表7进一步列出了在电离层扰动影响下信噪比为–10 dB和30 dB时各种算法对2个目标的定位RMSE值，以及本文算法相比于对比算法的RMSE降低百分比，可以看出：当信噪比为–10 dB时，本文算法对目标1的定位误差较两种

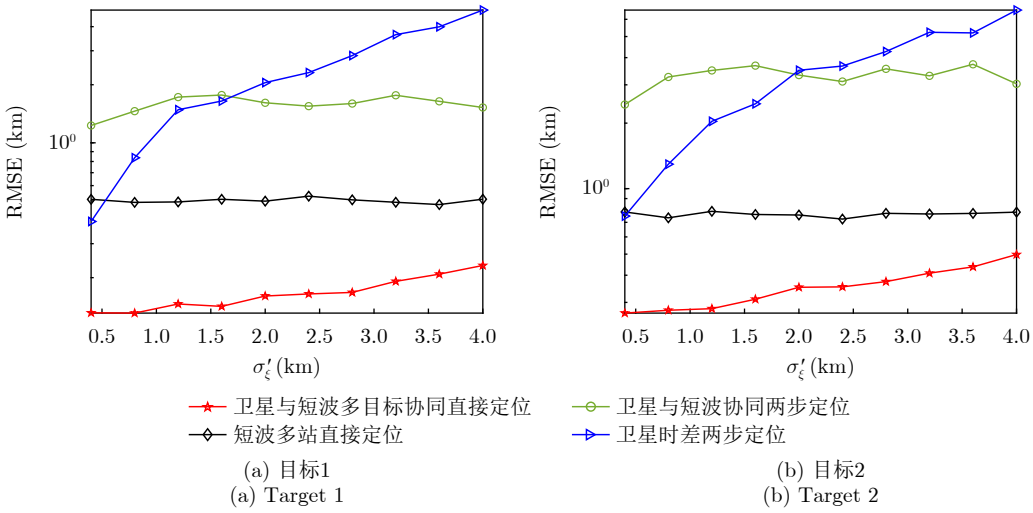


图 11 定位均方根误差随非高斯分布星历误差拖尾强度的变化曲线(无电离层扰动影响)

Fig. 11 The estimated RMSE curves versus tail strength of non-Gaussian satellite orbit errors in the absence of ionospheric disturbance

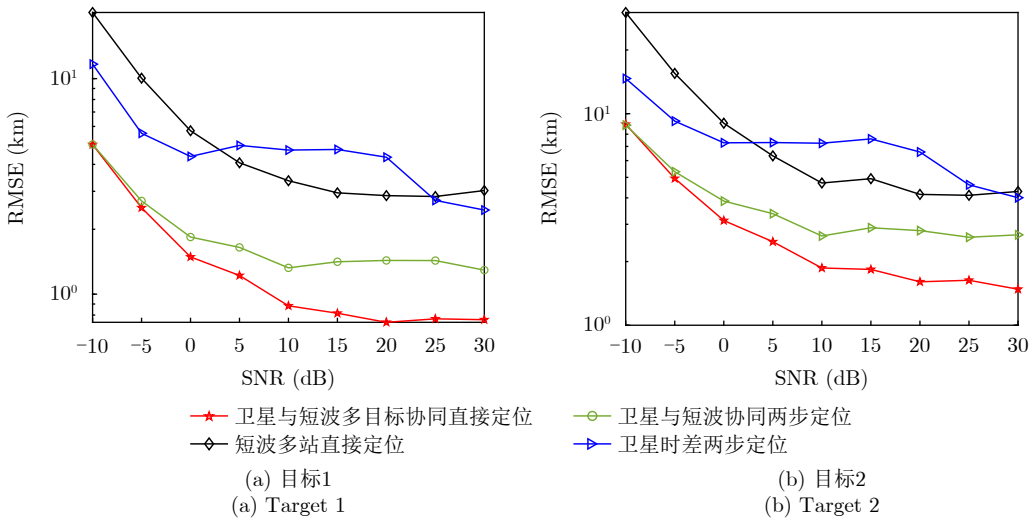


图 12 定位均方根误差随信噪比的变化曲线(电离层扰动影响)

Fig. 12 The estimated RMSE curves versus SNR in the presence of ionospheric disturbance

表 6　在SNR=–10 dB条件下本文算法与其他算法的定位误差性能对比(电离层扰动影响)

Tab. 6　Comparison of RMSEs of the proposed algorithm with other algorithms when SNR=–10 dB in the presence of ionospheric disturbance

算法	目标1		目标2	
	RMSE (km)	RMSE降低(%)	RMSE (km)	RMSE降低(%)
卫星与短波多目标协同直接定位	4.9439	–	9.1781	–
卫星与短波协同两步定位	4.9507	0.1374	9.2275	0.5354
短波多站直接定位	20.2697	75.6094	29.0506	68.4065
卫星时差两步定位	11.6728	57.6460	13.7481	33.2410

表 7　在SNR=30 dB条件下本文算法与其他算法的定位误差性能对比(电离层扰动影响)

Tab. 7　Comparison of RMSEs of the proposed algorithm with other algorithms when SNR=30 dB in the presence of ionospheric disturbance

算法	目标1		目标2	
	RMSE (km)	RMSE降低(%)	RMSE (km)	RMSE降低(%)
卫星与短波多目标协同直接定位	0.7613	–	1.4799	–
卫星与短波协同两步定位	1.2929	41.1169	2.6744	44.6642
短波多站直接定位	3.0249	74.8322	4.2879	65.4866
卫星时差两步定位	2.4561	69.0037	4.0069	63.0662

单一频段定位算法分别降低75.6094%与57.6460%，对目标2的定位误差较两种单一频段定位算法分别降低68.4065%与33.2410%，这体现了联合定位较短波与卫星单一频段定位在低信噪比条件下的性能优势；在信噪比为30 dB时，本文算法对目标1的定位误差较两种单一频段定位算法分别降低74.8322%与69.0037%，对目标2的定位误差较两种单一频段定位算法分别降低65.4866%与63.0662%，这体现了联合定位较短波与卫星单一频段定位对电离层扰动影响具有更强的鲁棒性。

4.3.2　定位精度随目标位置的变化

本小节保持短波观测站与卫星位置分布不变，通过设置不同辐射源的位置分布，用以研究相对于辐射源的不同星地定位构型下本文算法的定位性能。本小节设置了10种不同位置分布的地面辐射源，假设两个地面辐射源的纬度分别为31.4°N(目标1)和19.6°N(目标2)，将目标1的经度依次设置在75.2°E到120.2°E区间，将目标2的经度依次设置在72.7°E到117.7°E区间。不同目标位置点的分布如图13所示，图13中位于低经度位置的地面辐射源在短波观测站的近场区域，位于高经度位置的地面辐射源在卫星星下点的近场区域。针对分布在不同位置的目标辐射源定位场景，统计本文算法与对比算法的定位RMSE曲线，相关结果如图14所示。从图14中可以看出：(1)随着目标经度的增大，短波多站直接定位算法的定位误差整体呈上升趋势，这是因

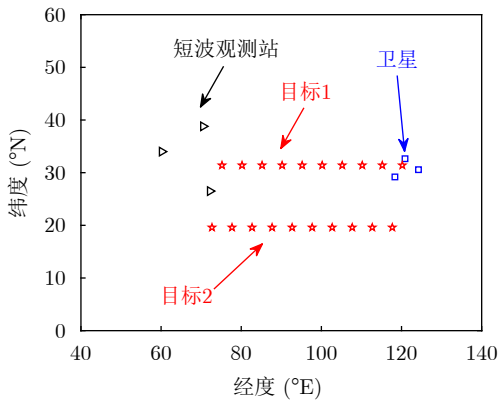
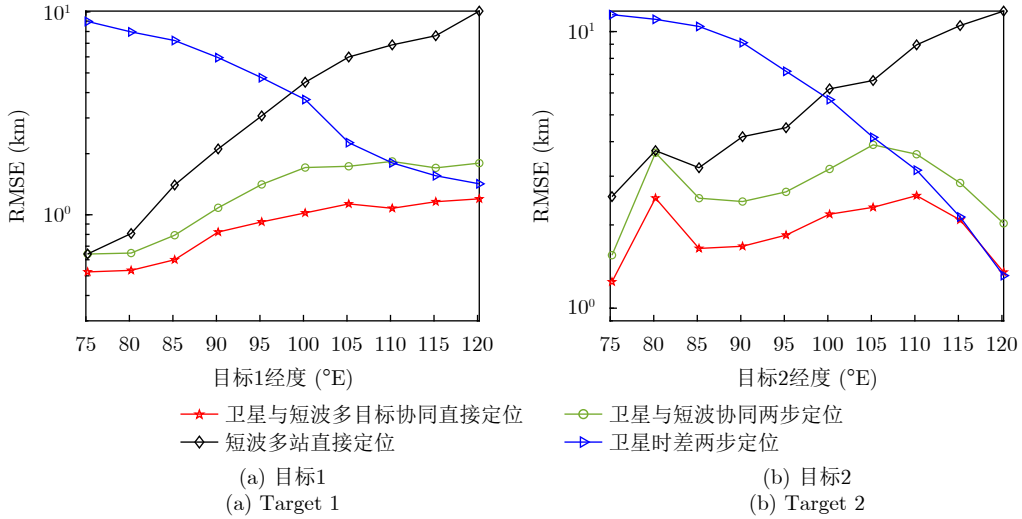


图 13 卫星与短波协同多目标定位的不同目标位置分布

Fig. 13 The layout of different positions of multiple targets in scenario of cooperative location based on satellite and shortwave signals

为此时目标与各短波观测站的距离增加，即短波多站对目标位置的相对基线变小，逐渐趋向于远场定位场景。(2)随着目标经度的增大，卫星时差两步定位算法的定位误差整体呈下降趋势，这是因为此时目标与卫星星下点距离减小，即星间距对目标位置的相对基线变大，卫星对目标的定位误差有显著改善。(3)随着目标经度的增大，本文所提定位算法以及卫星与短波协同两步定位算法的定位误差变化较为缓慢，这是因为两个频段的协同定位能够在几何构型上形成一定的优势互补，体现出不同星地协同定位构型下，联合定位较短波与卫星单一频段定位具有更加稳定的定位性能，而且本文算法由于



(a) 目标1 (a) Target 1　　(b) 目标2 (b) Target 2

图 14 定位均方根误差随不同目标位置的变化曲线(电离层扰动影响)

Fig. 14 The estimated RMSE curves for different positions of multiple targets in the presence of ionospheric disturbance

利用了不同目标所受星历误差影响相同这一隐含约束条件，其定位精度在不同几何分布场景下始终是最高的。(4)卫星、短波观测站和目标三者之间的相对几何分布关系对本文算法会产生一定影响，说明对不同星地协同定位构型的优化有利于进一步提升协同定位性能，因此对于协同定位观测站的部署优化与卫星调度将作为拓展本文工作的未来研究方向。

4.4 平均运行时间结果与分析

在信噪比为15 dB时，统计本文算法与卫星与短波协同两步定位、短波多站直接定位以及卫星时差两步定位在计算机(2.50 GHz的Intel Core i9-12900H CPU)上200次仿真的平均运行时间，结果如表8所示。从运行时间结果中能够看出：(1)短波多站直接定位由于无须对多目标多维测量参数进行估计，因此运行时间最短；(2)本文算法由于考虑了星历误差的校正问题，且是通过交替迭代求解实现，因此计算复杂度最高。(3)结合前文仿真结论可知，本文算法相较对比算法在多个定位场景下具备显著的定位性能优势，可见算法的定位性能增益以增大计算开销为代价，同时表8显示本文算法运行时间的量级与可实现星历误差校正的卫星时差两步定位算法相当，说明该额外计算开销处于可接受范围。

表 8 4种算法运行时间的比较(s)

Tab. 8 Comparison of running time for four algorithms (s)

算法	运行时间
卫星与短波多目标协同直接定位	5.5258
卫星与短波协同两步定位	1.9348
短波多站直接定位	0.2097
卫星时差两步定位	2.4933

5 结语

本文提出了一种星历误差条件下基于卫星与短波信号的多目标协同直接定位方法，实现了多目标地理坐标与星历参数的联合估计。该算法在建立短波和卫星观测信号与超视距定位模型基础上，引入星历误差的先验统计信息，建立了基于贝叶斯理论的最大似然优化模型，从而降低了星历误差对定位结果的影响。由于该优化模型融合短波与卫星两种观测信号，且存在星历误差参数，导致待优化参数较多，因此本文将待优化参数分为3组，设计了交替迭代算法对3组参数迭代求解，进而将原有的高维非线性优化问题降维处理。最后，通过无电离层扰动影响和存在电离层扰动影响两种情况下的数值仿真验证了本文所提算法的性能优势。仿真结果表明，本文算法较现有基于单一频段的定位算法以及未考虑星历误差影响的协同定位算法均具有更高的定位精度，且不易受观测站与目标几何构型变化的影响，尤其能够显著提升大星历误差条件下对地球表面多个目标辐射源的定位精度。需要说明的是，尽管仿真结果验证了本文所提联合定位算法在电离层扰动影响下具有更强的鲁棒性，但是由于本文并未对电离层扰动建模问题进行深入研究，因此算法本身不能对电离层误差进行显式参数估计与针对性补偿消除，对电离层扰动误差的定位修正问题将作为本文后续工作所要研究的方向。

附录A 式(41)的推导

下面讨论模型(36)的优化方法。根据投影矩阵

更新公式[25]，$\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p},\psi_k^{(\mathrm{a})})\right]$与$\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\phi}_{k'}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})})]$分别可以分解为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\boldsymbol{b}_k\left(\boldsymbol{p},\psi_k^{(\mathrm{a})}\right)\right]\\&\quad=\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)}\right)\right]\\&\qquad-\boldsymbol{\Pi}\left[\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{b}_k\left(\boldsymbol{p},\psi_k^{(\mathrm{a})}\right)\right]\end{aligned}\tag{A-1}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\\&\quad=\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\\&\qquad-\boldsymbol{\Pi}\left[\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\end{aligned}\tag{A-2}$$

将式(A-1)与式(A-2)代入式(37)中，舍去与$\boldsymbol{p}$无关的项得到

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{p}}_q^{(i)}=\arg\max_{\boldsymbol{p}}\Bigg\{&\frac{N}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})}\right)\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_k\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{b}_k\left(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})}\right)}{\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})}\right)\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k(q)}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{b}_k\left(\boldsymbol{p},\psi_{k,q}^{(\mathrm{a})}\right)}\\&+\frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}'^2}\sum_{k'=1}^{3}\frac{\boldsymbol{\phi}_{k'}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{y}_{k'}\boldsymbol{y}_{k'}^{\mathrm{H}}\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)}{\boldsymbol{\phi}_{k'}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k'}\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{(q)}^{(i-1)},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)\right]\cdot\boldsymbol{\phi}_{k'}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{k'}^{(\mathrm{a})}\right)}\Bigg\}\end{aligned}\tag{A-3}$$

附录B　$\boldsymbol{g}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k)$和$\boldsymbol{H}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k)$的表达式

根据$v_k^{(\mathrm{I})}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k)$的表达式，可以推导得到$\boldsymbol{g}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k)$和$\boldsymbol{H}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k)$的计算公式分别为

$$\boldsymbol{g}_k\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)=-2\mathrm{Re}\left\{\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{B}_k^{\dagger}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_k\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k)\right]\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_k^{\psi}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\right\}\right\}\ (k=1,2,\cdots,K)\tag{B-1}$$

$$\boldsymbol{H}_k\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\approx2\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{c}\left(\boldsymbol{B}_k^{\dagger}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_k\cdot\boldsymbol{B}_k\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\right)^{\mathrm{H}}\\\odot\left(\left(\dot{\boldsymbol{B}}_k^{\psi}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\right)^{\mathrm{H}}\cdot\boldsymbol{\Pi}^{\perp}\left[\boldsymbol{B}_k\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\right]\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_k^{\psi}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\psi_k\right)\right)\end{array}\right\}\ (k=1,2,\cdots,K)\tag{B-2}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{B}}_k^{\psi}(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\psi}_k)=\left[\frac{\partial\boldsymbol{b}_k(\boldsymbol{p}_1,\psi_{k,1})}{\partial\psi_{k,1}}\ \frac{\partial\boldsymbol{b}_{k_1}(\boldsymbol{p}_2,\psi_{k,2})}{\partial\psi_{k,2}}\ \cdots\ \frac{\partial\boldsymbol{b}_{k_1}(\boldsymbol{p}_Q,\psi_{k,Q})}{\partial\psi_{k,Q}}\right]$。

附录C　式(52)的推导

令$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}$表示$\boldsymbol{\xi}_{k'}$第$i$次Taylor级数迭代的结果，将$\boldsymbol{r}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{a})},\boldsymbol{\xi}_{k'})$在$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}$处进行一阶Taylor级数展开为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{k'}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'}\right)\approx&\boldsymbol{r}_{k'}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\\&+\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\left(\boldsymbol{\xi}_{k'}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\\&k'=1,2,3\end{aligned}\tag{C-1}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})=\frac{\partial\boldsymbol{r}_{k'}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\boldsymbol{\xi}_{k'})}{\partial\boldsymbol{\xi}_{k'}^{\mathrm{T}}}$。将式(C-1)代入式(51)中，可知$\boldsymbol{\xi}_{k'}$的第$i+1$次Taylor迭代能够通过求解如下线性最小二乘优化问题得到：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{\xi}_{k'}}\Bigg\|&\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\left(\boldsymbol{\xi}_{k'}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\\&-\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k'}-\boldsymbol{r}_{k'}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right)\Bigg\|_2^2\ (k'=1,2,3)\end{aligned}\tag{C-2}$$

那么通过对式(C-2)进行整理，可得$\boldsymbol{\xi}_{k_2}$的最小二乘估计结果为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i+1)}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}+&\mathrm{Re}^{-1}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right)^{\mathrm{H}}\right.\\&\left.\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right\}\\&\cdot\mathrm{Re}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}_{k'}^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right)^{\mathrm{H}}\right.\\&\left.\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k'}-\boldsymbol{r}_{k'}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{(\mathrm{b})},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k'}^{(i)}\right)\right)\right\}\\&(k'=1,2,3)\end{aligned}\tag{C-3}$$

式(C-3)即为更新$\boldsymbol{\xi}_{k'}$的Taylor级数迭代公式。

利益冲突 所有作者均声明不存在利益冲突

Conflict of Interests The authors declare that there is no conflict of interests

参 考 文 献

[1] WANG Qi, CHEN Xiaoming, QI Qiao, *et al*. Multiple-satellite cooperative information communication and location sensing in LEO satellite constellations[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2025, 24(4): 3346–3361. doi: 10.1109/TWC.2025.3530083.

[2] 任文娟, 胡东辉, 丁赤飚. 三星时差定位系统的多时差联合定位方法[J]. 雷达学报, 2012, 1(3): 262–269. doi: 10.3724/SP.J.1300.2012.20050.

REN Wenjuan, HU Donghui, and DING Chibiao. Multi-

TDOA location algorithm for three satellites TDOA passive location system[J]. *Journal of Radars*, 2012, 1(3): 262–269. doi: 10.3724/SP.J.1300.2012.20050.

[3] 王金龙, 陈瑾, 徐煜华. 短波通信技术研究进展与发展需求[J]. 陆军工程大学学报, 2022, 1(1): 1–7. doi: 10.12018/j.issn.2097-0730.20211218001.
WANG Jinlong, CHEN Jin, and XU Yuhua. On research advances and development requirements of high frequency communication technologies[J]. *Journal of Army Engineering University of PLA*, 2022, 1(1): 1–7. doi: 10.12018/j.issn.2097-0730.20211218001.

[4] 王鼎, 尹洁昕, 高路, 等. 一种协同二维DOA和TDOA观测量的超视距短波辐射源定位新方法[J]. 雷达学报(中英文), 2024, 13(6): 1135–1156. doi: 10.12000/JR24136.
WANG Ding, YIN Jiexin, GAO Lu, *et al*. A novel cooperative positioning method for over-the-horizon shortwave emitter based on two-dimensional direction-of-arrival and time-difference-of-arrival measurements[J]. *Journal of Radars*, 2024, 13(6): 1135–1156. doi: 10.12000/JR24136.

[5] 郭福成, 李金洲, 张敏. 无源定位原理与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2021: 433.
GUO Fucheng, LI Jinzhou, and ZHANG Min. Passive Location Theories and Methods[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2021: 433.

[6] 王鼎, 尹洁昕, 朱中梁. 针对超视距短波辐射源的测角与测时差协同定位方法[J]. 中国科学: 信息科学, 2022, 52(11): 1942–1973. doi: 10.1360/SSI-2021-0331.
WANG Ding, YIN Jiexin, and ZHU Zhongliang. Novel cooperative localization method of over-the-horizon shortwave emitters based on direction-of-arrival and time-difference-of-arrival measurements[J]. *Scientia Sinica*: *Informationis*, 2022, 52(11): 1942–1973. doi: 10.1360/SSI-2021-0331.

[7] POISEL R A, 屈晓旭, 罗勇, 译. 电子战目标定位方法[M]. 北京: 电子工业出版社, 2008.
POISEL R A, QU Xiaoxu and LUO Yong, translation. Electronic Warfare Target Location Methods[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2008.

[8] YIN Jiexin, WANG Ding, YANG Xin, *et al*. Combination of land-based and satellite-based OTH geolocations using differentiable exact penalty method[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(3): 2363–2382. doi: 10.1109/TAES.2021.3133303.

[9] YIN Jiexin, WANG Ding, YANG Bin, *et al*. A single-step method for over-the-horizon geolocation using importance sampling[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 2021: 5574110. doi: 10.1155/2021/5574110.

[10] 李建峰, 朱珂慧, 江航, 等. 基于多频率聚焦与融合的相干辐射源时差直接定位方法[J]. 电子学报, 2023, 51(8): 2110–2117. doi: 10.12263/DZXB.20230170.
LI Jianfeng, ZHU Kehui, JIANG Hang, *et al*. A direct position determination method of TDOA based on multi-frequency focusing and fusion for coherent radiation sources[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2023, 51(8): 2110–2117. doi: 10.12263/DZXB.20230170.

[11] LI Jiaqi, LI Jianfeng, YOU Mingyi, *et al*. Direct position determination of coherently distributed sources based on canonical polyadic decomposition[J]. *Digital Signal Processing*, 2025, 166: 105353. doi: 10.1016/j.dsp.2025.105353.

[12] 余天歌, 尹洁昕, 王鼎, 等. 基于多目标空域规律约束的卫星与短波信号协同直接定位方法[J]. 系统工程与电子技术, 2026, 48(7): 2153–2163. doi: 10.12305/j.issn.1001-506X.2026.07.03.
YU Tiange, YIN Jiexin, WANG Ding, *et al*. Cooperative direct position determination method for satellite and shortwave signals based on multi-target spatial domain law constraints[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2026, 48(7): 2153–2163. doi: 10.12305/j.issn.1001-506X.2026.07.03.

[13] 孙凤娟, 柳文, 李铁成. 电离层对短波测向系统的影响分析[J]. 装备环境工程, 2017, 14(7): 45–49. doi: 10.7643/issn.1672-9242.2017.07.009.
SUN Fengjuan, LIU Wen, and LI Tiecheng. Effects of ionosphere on high-frequency direction finding systems[J]. *Equipment Environmental Engineering*, 2017, 14(7): 45–49. doi: 10.7643/issn.1672-9242.2017.07.009.

[14] 赵宁, 周芳, 王震, 等. P波段雷达成像电离层效应的地面观测与校正[J]. 雷达学报, 2014, 3(1): 45–52. doi: 10.3724/SP.J.1300.2014.13144.
ZHAO Ning, ZHOU Fang, WANG Zhen, *et al*. Ground observation and correction of P-band radar imaging ionospheric effects[J]. *Journal of Radars*, 2014, 3(1): 45–52. doi: 10.3724/SP.J.1300.2014.13144.

[15] CAO Yalu, PENG Li, LI Jinzhou, *et al*. A new iterative algorithm for geolocating a known altitude target using TDOA and FDOA measurements in the presence of satellite location uncertainty[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(5): 1510–1518. doi: 10.1016/j.cja.2015.08.015.

[16] CHEN Xin, WANG Ding, YIN Jiexin, *et al*. Augmented Lagrange geolocation algorithm using TDOA measurements and calibration sources in the presence of satellite position errors[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2019, 111: 152900. doi: 10.1016/j.aeue.2019.152900.

[17] HAO Benjian, LI Zan, SI Jiangbo, *et al*. Joint source localisation and sensor refinement using time differences of arrival and frequency differences of arrival[J]. *IET Signal Processing*, 2014, 8(6): 588–600. doi: 10.1049/iet-spr.2013.0186.

[18] 王鼎, 尹洁昕, 郑娜娥, 等. 收发未精确同步条件下非相关多运

动辐射源TOAs/FOAs协同定位方法[J]. 电子学报, 2024, 52(2): 550–563. doi: 10.12263/DZXB.20230524.
WANG Ding, YIN Jiexin, ZHENG Na'e, *et al*. TOAs/FOAs cooperative localization method for multiple disjoint moving emitters in presence of imperfect synchronization between receivers and transmitters[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2024, 52(2): 550–563. doi: 10.12263/DZXB.20230524.

[19] WU Guizhou, ZHANG Min, and GUO Fucheng. Self-calibration direct position determination using a single moving array with sensor gain and phase errors[J]. *Signal Processing*, 2020, 173: 107587. doi: 10.1016/j.sigpro.2020.107587.

[20] DENG Jie, YIN Jiexin, YANG Bin, *et al*. Direct position determination algorithm for non-circular sources in the presence of mutual coupling and its theoretical performance analysis[J]. *IET Signal Processing*, 2023, 17(3): e12193. doi: 10.1049/sil2.12193.

[21] ZHU Kehui, JIANG Hang, LI Jianfeng, *et al*. A direct position determination method using distributed UAVs with synchronization error[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2024, 24(1): 780–787. doi: 10.1109/JSEN.2023.3333950.

[22] XU Chen, CAI Hongtao, GAO Shunzu, *et al*. A method for HF skywave source geolocation in unknown ionosphere environments and experimental results[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2023, 22(5): 1059–1063. doi: 10.1109/LAWP.2022.3232399.

[23] ZHU Peng, ZHANG Yuannong, YANG Guobin, *et al*. Development of backscatter sounding single-site location system[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2016, 10(3): 632–636. doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0424.

[24] 凯(KAY S M), 罗鹏飞, 译. 统计信号处理基础——估计与检测理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2011.
KAY S M, LUO Pengfei, translation. Fundamentals of Statistical Signal Processing Processing[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011.

[25] ZISKIND I and WAX M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(10): 1553–1560. doi: 10.1109/29.7543.

[26] WU Hao, SU Weimin, and GU Hong. A novel Taylor series method for source and receiver localization using TDOA and FDOA measurements with uncertain receiver positions[C]. 2011 IEEE CIE International Conference on Radar, Chengdu, China, 2011: 1037–1040. doi: 10.1109/CIE-Radar.2011.6159729.

[27] 张小飞, 李建峰, 徐大专. 传感器阵列信源定位[M]. 北京: 电子工业出版社, 2018.

[28] 郭福成, 樊昀, 张敏, 等. 航天电子侦察定位原理[M]. 北京: 电子工业出版社, 2025.
GUO Fucheng, FAN Yun, ZHANG Min, *et al*. Localization Principles of Aerospace Electronic Reconnaissance[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2025.

[29] 郭福成. 低轨电子侦察卫星轨道高度与定位体制效能分析[J]. 航天电子对抗, 2025, 41(3): 1–5. doi: 10.16328/j.htdz8511.2025.03.001.
GUO Fucheng. Analysis of efficiency with height of low orbit spaceborne ELINT location system[J]. *Aerospace Electronic Warfare*, 2025, 41(3): 1–5. doi: 10.16328/j.htdz8511.2025.03.001.

[30] 徐玲玲, 赵航, 宋静, 等. 基于SGP4模型的空间站轨道精度分析[J]. 全球定位系统, 2024, 49(2): 98–105. doi: 10.12265/j.gnss.2023194.
XU Lingling, ZHAO Hang, SONG Jing, *et al*. Space station orbital accuracy analysis based on the SGP4 model[J]. *GNSS World of China*, 2024, 49(2): 98–105. doi: 10.12265/j.gnss.2023194.

[31] YANG Baojian, HUANG Hao, and CAO Lu. Centered error entropy-based sigma-point Kalman filter for spacecraft state estimation with non-Gaussian noise[J]. *Space: Science & Technology*, 2022, 2022: 9854601. doi: 10.34133/2022/9854601.

[32] LIU Jihua, LI Zhigang, YANG Xuhai, *et al*. Variation of satellite transponder delay[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2014, 59(21): 2568–2573. doi: 10.1007/s11434-014-0342-2.

作 者 简 介

尹洁昕，副教授，主要研究方向为无线协同定位、阵列信号处理、智能信号分析与处理。

王　鼎，副教授，主要研究方向为无线协同定位、阵列信号处理。

周　南，实验师，主要研究方向为通信信号处理、信道编码分析。

余天歌，讲师，主要研究方向为无线协同定位。

(责任编辑：高山流水)