

一种新型高精度和高效率的 K 分布形状参数矩估计器

李大朋*

(中国科学院光电研究院 北京 100094)

摘要: 基于 $[z\log(z)]$ 的 K 分布形状参数 v 的 X-估计器(XE)虽然具有免于求解非线性方程的计算因而估计效率高的优点,但是,其估计精度却低于许多其他矩估计器,且有时会出现奇异值的情况。为扬长避短,在对 X-估计器的估计偏差进行推导和分析的基础上,通过一系列 Monte-Carlo 实验, X-估计器改进成文中提出的具有校正项的 X-估计器(XCE)。XCE 克服了 X-估计器的上述缺点。仿真实验表明, XCE 保持了 XE 高的估计效率,同时显著地提高了参数估计的精度。

关键词: K 分布; 矩估计器; X-估计器(XE); 正规化对数估计器; 校正项

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2014)04-0439-05

DOI: 10.3724/SP.J.1300.2014.14017

A New Type of Moment Estimator for the K-distribution Shape Parameter with High Accuracy and Efficiency

Li Da-peng

(Academy of Opto-electronics, Chinese Academy of Science, Beijing 100094, China)

Abstract: The X-Estimator (XE) for the K-distribution shape parameter v based on the $z\log(z)$ expectation can be computed without solving nonlinear equations; thus, it has high estimating efficiency. Nonetheless, its estimating accuracy is lower than many other moment estimators, and occasionally the XE results in odd values. To best use its advantages and avoid its disadvantages, on the basis of derivation and analysis of the XE bias using a set of Monte Carlo experiments, the X-Estimator with a Corrective term (XCE), which overcomes the above shortcomings of the XE, is discussed. Simulations show that the XE and XCE have the same high computational estimating efficiency, whereas the XCE significantly enhances the accuracy of the estimating shape parameter.

Key words: K-distribution; Moment estimator; X-Estimator (XE); Normolised log estimator; Corrective term

1 引言

迄今,人们提出了许多 K 分布形状参数 v 的估计方法^[1-12]。其中,极大似然估计方法(MLE)理论上给出了最优的 v 参数估计^[13]。不过,由于 MLE 的估计过程涉及冗繁的、十分低效的 2 维数值计算过程,一般不具有实际应用价值。因此,计算比较简单矩估计(MOM)就成了对 v 参数估计的最常用的方法。以正规化对数估计器(Normolised Log Estimator, NLE)^[8]为代表的 MOM 方法,虽然在 MOM 估计器中具有极为接近 MLE 的估计精度,但它仍然摆脱不了求解非线性方程的复杂计算,对 K 分布形状参数 v 的计算效率仍然低效。

直到 2001 年,文献[14]使用了叫做 X-估计器(XE)的所谓 $[z\log(z)]$ 期望来估计 v 参数。研究发现,

由于 X-估计器不要求解非线性方程的冗繁计算,使得它在迄今众多的 K 分布参数估计器中效率是最好的。问题是, XE 的估计精度虽稍好于基于分数阶矩估计方法^[15],但低于正规化对数估计器(Normolised Log Estimator, NLE)。特别在实践中,人们发现 XE 的估计结果有时会出现异常大的奇异值,甚至出现 $v < 0$ 等实际中不可能出现的情况。这些问题严重影响了 XE 的应用。

自 2001 年 XE 问世以来,作为它的一种改进,胡文琳等人^[16]于 2008 年提出了基于 $[z\log(z)]$ 期望的 K 分布参数估计方法。由于该方法在估计中仍离不开求解非线性方程的繁琐过程,依然影响这一方法在实际中的应用。

迄今的各种 K 分布形状参数估计器都不具备对估计误差在参数估计过程中进行校正的功能,使得其估计精度不易得到提高。本文提出一种带校正项的 X-估计器(the X-Estimator with Corrective term,

2014-01-22 收到, 2014-06-08 改回; 2014-07-08 网络优先出版

国家自然科学基金(61271427)资助课题

*通信作者: 李大朋 xxxh2222@sina.com

XCE), 具有在参数估计过程中对估计误差进行校正的特性, 克服了文献[14]和文献[16]提出的估计器的缺点, 既保持了与 XE 相同的高估计效率, 又显著提高了参数估计的精度。

2 具有校正项的 X-估计器

2.1 X-估计器

设 z 为信号强度, 则 K 分布可表示为:

$$p(z) = \frac{2}{\Gamma(v)} \left(\frac{v}{\mu} \right) \left(\frac{v}{\mu} z \right)^{(v-1)/2} K_{v-1} \left(2 \sqrt{\frac{v}{\mu} z} \right) \quad (1)$$

其中, v 为 K 分布的形状参数, $v > 0$, μ 为均值, $K_{v-1}(\cdot)$ 为 $v-1$ 阶修正的 Bessel 函数。

文献[14]提出的 X-估计器具有如下形式:

$$\hat{X} = \frac{[z \log(z)]}{[z]} - [\log(z)] \quad (2)$$

$$X = \langle \hat{X} \rangle = 1 + \frac{1}{v} \quad (3)$$

其中, $[f(z)] = (1/N) \sum_{i=1}^N f(z_i)$, N 为样本长度, $\langle \cdot \rangle$ 表示取期望值, 符号 “ $\hat{\cdot}$ ” 表示估计值。

根据式(2), 可得

$$\langle \hat{X} \rangle = \left\langle \frac{T_3}{T_1} - T_2 \right\rangle \quad (4)$$

其中, $T_1 = [z] = (1/N) \sum_{i=1}^N z_i$, $T_2 = [z \log(z)] = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N z_i \log(z_i)$, $T_3 = \log(z) = \log\left((1/N) \sum_{i=1}^N z_i\right)$, N 为样本长度。

把 $1/T_1$ 在它的均值点 $\langle z \rangle$ 处展开直到含有 $1/N$ 项, 则得:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{2}{\langle z \rangle} - \frac{T_1}{\langle z \rangle^2} \quad (5)$$

设 ΔX 为 X-估计器的偏差, 则借助式(5)可得:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \langle \hat{X} \rangle - X \\ &= \langle \hat{X} - X \rangle \\ &= \left\langle \frac{T_3}{T_1} - T_2 \right\rangle - X \\ &\approx \left\langle \frac{2T_3}{\langle z \rangle} - T_2 - \frac{T_1 T_3}{\langle z \rangle^2} \right\rangle - \left\langle \frac{z \ln(z)}{\langle z \rangle} - \langle \ln(z) \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{N} \left[\frac{\langle z \ln(z) \rangle \langle z^2 \rangle}{\langle z \rangle^3} - \frac{2 \langle z^2 \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle^2} + (N-1) \frac{\langle z \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle} \right] \right. \\ &\quad \left. - \langle \ln(z) \rangle \right\rangle - \left\langle \frac{z \ln(z)}{\langle z \rangle} - \langle \ln(z) \rangle \right\rangle \\ &= \frac{1}{N} \left[\frac{\langle z \ln(z) \rangle \langle z^2 \rangle}{\langle z \rangle^3} - \frac{2 \langle z^2 \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle^2} - \frac{\langle z \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

即得

$$\Delta X = \Delta_{1/N} + o(\Delta_{1/N}) \quad (7)$$

其中

$$\Delta_{1/N} = \frac{1}{N} \left[\frac{2 \langle z^2 \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle^2} - \frac{\langle z^2 \rangle \langle z \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle^3} - \frac{\langle z \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle} \right] \quad (8)$$

且 $o(\Delta_{1/N})$ 为 $\Delta_{1/N}$ 的 $N \rightarrow \infty$ 时的高阶无穷小。

由式(6), 式(7)可得:

$$\left\langle \left(\hat{X} - \Delta_{1/N} \right) - X \right\rangle = o(\Delta_{1/N}) \quad (9)$$

显然, 若用式(9)中的 $\left\langle \left(\hat{X} - \Delta_{1/N} \right) \right\rangle$ 构成一个新的关于 K 分布形状参数 v 的估计器, 则估计器的偏差会比 XE 小 1 阶 ($N \rightarrow \infty$)。

2.2 带校正项的 X-估计器(XCE)

为进一步减小截断误差 $o(\Delta_{1/N})$ 对估计精度的影响, 借鉴文献[10,17]在估计器公式中引入待定常数, 并通过实验手段获得经验值, 用经验值来确定估计器公式中待定常数的方法, 现给出具有校正项的 X-估计器(XCE)的表达式如下:

$$\hat{\Lambda} = \frac{[z \log(z)]}{[z]} - [\log(z)] - k \Delta_{1/N} \quad (10)$$

$$\Lambda = \langle \hat{\Lambda} \rangle = 1 + \frac{1}{v} \quad (11)$$

其中, 常数 k 称为校正系数, 由实验确定取经验值。 $k \Delta_{1/N}$ 称为校正项。

以下给出式(11)的证明:

由式(8), 显然有 $\lim_{N \rightarrow \infty} [k \Delta_{1/N}] = 0$, 注意到式(3) 则

$$\begin{aligned} \Lambda &= \langle \hat{\Lambda} \rangle \\ &= \left\langle \frac{[z \log(z)]}{[z]} - [\log(z)] - k \Delta_{1/N} \right\rangle \\ &= 1 + \frac{1}{v} - \lim_{N \rightarrow \infty} [k \Delta_{1/N}] \\ &= 1 + \frac{1}{v} \quad (12) \end{aligned}$$

2.3 校正系数 k 的确定

众所周知, 对于 K 分布形状参数 v , $v \in [0.2, 2.0]$ 的范围具有突出的重要意义^[17]。这是因为尖杂波对雷达信号处理的影响很大, 特别是在尖杂波背景下进行恒虚警处理时, 通过估计器估计得到的形状参数 v 值的误差较大, 会造成虚警概率的急剧升高而引起大的信噪比损失^[16]。所以, 在实际的雷达信号处理中, 人们更加注意尖杂波参数 $v \in [0.2, 2.0]$ 的范围。基于此, 本文以 $v \in [0.2, 2.0]$ 的范围来确定校正系数 k 满足实际应用的取值。

研究表明, 校正系数 k 的取值, 对式(10), 式(11)

确定的估计器的估计精度有显著的影响，现以 $N=190$ 的情况为例，给出通过实验确定 k 值的方法示例。实验条件： $v \in [0.2, 2.0]$ 取步长等于 0.2，在式 (10) 中，分别取 $k=0, 0.1, \dots, 1.0$ ，步长等于 0.1，进行 10000 次 Monte-Carlo 实验。图 1 和图 2 给出实验得到的标准差和偏差的 $k=0, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0$ 时的比较情况。

注：实验中 $k=0.1, 0.2, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ 的情况都不如 $k=0.3, 0.4$ 和 0.5 的情况，为保持图像清晰，其曲线图中省略。

从图 1, 图 2 可见，对于不同的 k 值，由式(10), 式(11)确定的估计器所得到的标准差、偏差有着十分明显的差别，且 k 的最优值就在 0.4。这是因为：由图 1 不难看出，标准差比较小的是 $k=0.4, 0.5$ 和 1.0 3 种情况。尽管它们相差不多，但仍可比较出它们标准差的差别。其中， $k=1.0$ 时，标准差最小， $k=0.5$ 时次之， $k=0.4$ 时相对居三者中的第三。但是，标准差只是反映了问题的一个方面。而从图 2 来看， $k=1.0$ 时偏差却是 k 取 5 种不同值时偏差最大的； $k=0.5$ 时，所得估计偏差也明显不如 $k=0.4$ 的情况。所以，综合标准差和偏差两种情况考虑，取 $k=0.4$ 应该是最优选择。

3 仿真实验

实验证明，本文提出的 XCE 对于 $k=0.4$ ，在样本长度 N 取不同的值时，都既保持了与 XE 同样的

高的估计效率，同时又具有很高的估计精度。以下以 $N=250$ 为例给出具体实验结果。

实验条件：K 分布形状参数 $v \in [0.2, 2.0]$ ，实验步长为 0.2。在该条件下，用 XE, XCE 和 NLE，通过 10000 次 Monte-Carlo 实验得到了有关的均值、偏差及标准差并进行比较。

图 3 给出了实验得到的几种估计器的均值比较情况。由图 3 可见，估计器 XCE 的估计均值几乎就是均值曲线的理想曲线。相比之下，NLE 的均值情况虽稍好于 XE，但它们的估计均值在实验给定的 v 值范围内，随着 v 值的增大，其估计均值的精确程度却越来越显著地劣于 XCE。

图 4 给出了实验得到的几种估计器偏差的比较情况。从图 4 可以看出，相比 XE 和 NLE，本文提出的估计器 XCE 具有最小的估计偏差。由图 4 可见，在整个 $v \in [0.2, 2.0]$ 的范围内，XE 的估计偏差大于 NLE，但它们的估计偏差都显著大于 XCE。特别显而易见的是，对 $v \in [0.2, 2.0]$ 随着 v 值的增大，XCE 的估计偏差曲线几乎是一个接近于横轴的常数，十分接近偏差接近于 0 的理想情况。

图 5 给出了 XE, XCE 和 NLE 3 种估计器在 $v \in [0.2, 2.0]$ 范围内，通过 10000 次 Monte-Carlo 仿真实验，所得到的对 v 进行估计的标准差的比较情况。由图 5 可见，在此范围内，XE 的标准差都大于 NLE。而对于 XCE 来说，在 $v \in [0.2, 1.4]$ 时，XCE

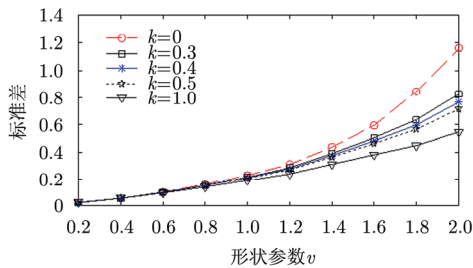


图 1 校正系数 k 取不同数值时标准差比较图
Fig. 1 Comparison of standard deviation obtained when k is taken different values

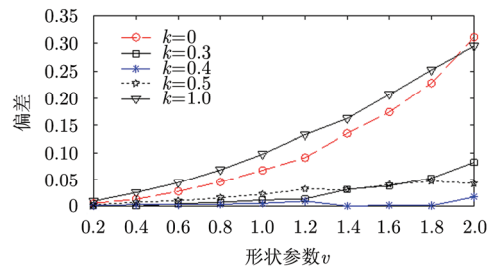


图 2 校正系数 k 取不同数值时偏差比较图
Fig. 2 Comparison of bias obtained when k is taken different values

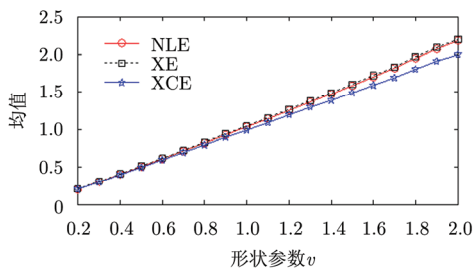


图 3 估计器 NLE, XE 和 XCE 估计均值比较
Fig. 3 Comparison of means obtained by the NLE, XE and XCE

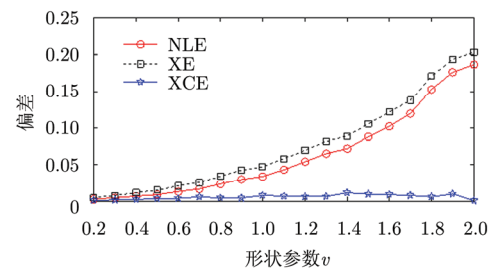


图 4 估计器 NLE, XE 和 XCE 估计偏差比较
Fig. 4 Comparison of bias obtained by the NLE, XE and XCE

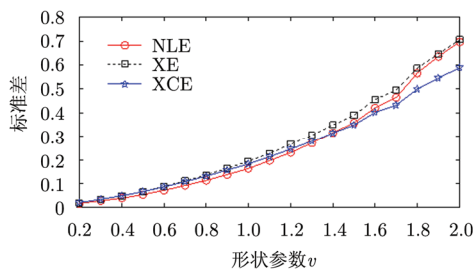


图5 估计器 NLE, XE 和 XCE 所得估计标准差比较

Fig. 5 Comparison of standard deviation obtained by the NLE, XE and XCE

的估计标准差略大于 NLE, 但相差不多; 但随着 v 值在实验设定范围内的增大, 在 $v \in [1.4, 2.0]$ 区间上, XCE 估计得到的标准差却越来越显著地小于 XE 和 NLE。

综上所述, XCE 既保持了 XE 在参数估计过程中, 可直接给出参数估计值的高的计算效率, 又显著提高了参数估计的精度。从参数估计的效率上看, 与 XE 相比, 两种估计器具有同样高的参数估计效率, 而从参数估计的精度上看, 无论是从均值、偏差还是从标准差的情况来衡量, XCE 参数估计的精度都明显优于 XE。而与一般被认为是矩估计器中精度最高的 NLE 相比, 在参数估计的效率上, 由于 NLE 在参数估计过程中必须有求解非线性方程的复杂计算, 则 XCE 的参数估计效率显著高于 NLE; 而在参数估计精度上, 在实验设定的 v 值范围内, XCE 估计均值和估计偏差的情况都显著优于 NLE, XCE 估计的标准差在实验设定的 v 值范围内, 部分略大于 NLE, 但另一部分随着 v 值的增大却越来越显著小于 NLE。

4 结论

迄今各类 K 分布形状参数估计器都不具有在估计过程中对估计误差进行校正的功能。本文提出的具有校正项的 X-估计器(XCE), 在 XE 的基础上, 增添了校正项, 实现了对 XE 性能的扬长避短。与 XE 相比, 它们有同样高的参数估计效率, 但 XCE 参数估计的精度却显著高于 XE。与 NLE 相比, 从参数估计的效率上看, 显然 XCE 的参数估计效率明显高于 NLE; 而从参数估计的精度上看, 在实验设定的范围内, XCE 的参数估计均值显著比 NLE 精确, XCE 的参数估计偏差显著小于 NLE; XCE 参数估计的标准差在 $v \in [0.2, 1.4]$ 的范围内略大于 NLE, 而在 $v \in [1.4, 2.0]$ 的范围内随着 v 值的增大, XCE 参数估计的标准差越来越显著小于 NLE。

参考文献

- [1] 李永晨, 刘浏. SAR图像统计模型综述[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(13): 184-190.
Li Yong-chen and Liu Liu. Review of statistical method of SAR image[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2013, 49(13): 184-190.
- [2] 孙增国. 基于第二类统计量的K分布参数估计[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(1): 1-4.
Sun Zeng-guo. Parameter estimation of K distribution based on second-kind statistics[J]. *Application Research of Computers*, 2013, 30(1): 1-4.
- [3] 李亚超, 周瑞雨, 全英汇, 等. 自适应背景窗的舰船目标检测算法[J]. 西安交通大学学报, 2013, 36(3): 1-6.
Li Ya-chao, Zhou Rui-yu, Quan Ying-hui, et al. An algorithm of ship target detection based on the adaptive background window function[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2013, 36(3): 1-6.
- [4] 杨永生, 张宗杰. 基于分数阶矩和NM单纯形算法的海杂波参数估计[J]. 遥感技术与应用, 2011, 26(6): 771-773.
Yang Yong-sheng and Zhang Zong-jie. Parameters estimation of sea clutter based on fractional order moments and NM algorithm[J]. *Remote Sensing Technology and Application*, 2011, 26(6): 771-773.
- [5] 徐伟, 陈永森. 一种K分布杂波参数估计方法[J]. 舰船电子对抗, 2013, 36(3): 89-91.
Xu Wei and Chen Yong-sen. An estimation method for K-distribution clutter parameters[J]. *Shipboard Electronic Countermeasure*, 2013, 36(3): 89-91.
- [6] 董蒙, 谈亮. 基于功率拟合的时空相关K分布海杂波信号及仿真[J]. 指挥控制与仿真, 2013, 30(1): 97-100.
Dong Meng and Tan Liang. Signal-level simulation of temporal-spatial correlated K-distribution sea clutter based on power fitting[J]. *Command Control & Simulation*, 2013, 30(1): 97-100.
- [7] 时公涛, 赵凌君, 桂琳, 等. 基于Mellin变换的K分布参数估计新方法[J]. 电子学报, 2010, 38(9): 117-123.
Shi Gong-tao, Zhao Ling-jun, Gui Lin et al. A novel parameter estimation method for the K distribution based on the Mellin transform[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(9): 117-123.
- [8] Oliver C J. Optimum texture rstimatos for SAR clutter[J]. *Journal of Physics: D*, 1993, 26(11): 1824-1835.
- [9] Blacknell D. Comparison of parameter for K-distribution[J]. *IEE Proceedings-Radar, Sonar, and Navigation*, 1994, 141(1): 45-52.
- [10] Jahangir M, Blacknell D, and White R G. Accurate approximation to the optimum parameter estimate for K-distributed clutter[J]. *IEE Proceedings-Radar, Sonar, and Navigation*, 1996, 143(6): 383-390.

- [11] 李大朋. 对Jahangir组合式矩估计器的改进[J]. 北京航空航天大学学报, 2012, 38(6): 788-792.
Li Da-peng. Improvement of Jahangir's multiple moments estimator[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2012, 38(6): 788-792.
- [12] 李大朋. 对K分布形状参数M估计器的再改进[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(7): 1752-1755.
Li Da-peng. A further enhanced M-estimator for the K-distribution shape parameter[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(7): 1752-1755.
- [13] Joughin I R. Maximum likelihood estimation of K-distribution parameters for SAR data[J]. *IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing*, 1993, 31(5): 989-999.
- [14] Blacknell D and Tough R J. A parameter estimation for the K-distribution based on $z \log(z)$ [J]. *IEE Proceedings-Radar, Sonar, and Navigation*, 2001, 148(6): 309-312.
- [15] Iskander D R and Zoubir A M. Estimation of the parameters of the K-distribution using higher order and fractional moments[J]. *IEEE Transactions on Aerospace Electronics and System*, 1999, 35(4): 1453-1457.
- [16] 胡文琳, 王永良, 王首勇. 基于 $z \log(z)$ 期望的K分布参数估计[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(1): 203-205.
Hu Wen-lin, Wang Yong-liang, and Wang Shou-yong. Estimation of the parameters K-distribution based on $z \log(z)$ [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(1): 203-205.
- [17] 郝程鹏, 侯朝焕, 鄢锦. 一种新的K分布形状参数估计器[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(9): 1404-1407.
Hao Cheng-peng, Hou Chao-huan, and Yan Jin. A new estimator for estimating the parameters of K-distribution[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2005, 27(9): 1404-1407.

作者简介



李大朋(1979-), 男, 助理研究员, 研究方向为信号处理及参数估计。
E-mail: xxxh2222@sina.com