

典型阵列快速 MUSIC 算法研究

张兴良* 王可人 樊甫华
(电子工程学院信息系 合肥 230037)

摘要: 由于 MUSIC(MUltiple SIgnal Classification)算法需要大量的乘法运算和三角函数求值, 导致其实时处理能力较弱。为此, 该文首先对均匀线阵和均匀圆阵的阵列结构进行分析, 提取导向矢量的一些性质。然后, 利用 Hermite 矩阵的性质对复数乘法进行分解, 再组建两个实值向量以减少乘法运算次数。最后, 利用导向矢量的性质提出一种基于查表的新算法。新算法既没有三角函数求值运算, 又不需要大量的存储空间。仿真实验结果表明新算法在没有改变 MUSIC 算法谱估计的效果的前提下, 将 MUSIC 算法的运算速率提高了 50 倍以上。因此, 新算法具有广阔的应用前景。

关键词: 典型阵列; 导向矢量; 查表法; 快速 MUSIC(MUltiple SIgnal Classification)算法

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2012)02-0149-08

DOI: 10.3724/SP.J.1300.2012.20026

Study on Fast MUSIC Algorithm with Typical Array

Zhang Xing-liang Wang Ke-ren Fan Fu-hua

(Department of Information Engineering, Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China)

Abstract: Because MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) algorithm needs a large number of multiplications and trigonometric function evaluations, it is weak in the real time processing. This paper is aim at resolving above problem. Firstly, by analyzing the structural features of the uniform circular array and the uniform linear array, some properties of steering vector are extracted. Then, the properties of Hermite matrix are employed to decompose the complex multiplication, and then two real vectors are constructed to reduce the number of multiplications. Finally, with the properties of steering vector, a new algorithm based on look-up-table is proposed. The new algorithm neither has any trigonometric function evaluation, nor requires much memory space. The result of simulation experiments shows that the new algorithm raises the rate of MUSIC algorithm more than 50 times, while ensures the same estimated results. Therefore, the new algorithm has a wide application prospect.

Key words: Typical array; Steering vector; Look-up-table method; Fast MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) algorithm

1 引言

传统的空间信号谱分析法是傅里叶变换法, 由于阵列尺寸有限, 该方法的分辨率受到瑞利限的约束。以多重信号分类 (MUltiple SIgnal Classification, MUSIC)算法^[1]为代表的子空间类处理方法, 即所谓超分辨空间谱估计算法^[2], 突破了瑞利限的限制, 实现了谱估计理论的重大飞跃。近年来, 这类算法广泛应用在通信、雷达和航天等诸多领域, 其优点早已得到实践证明。

遗憾的是, 超分辨空间谱估计算法需要大量的乘法和三角函数求值, 因此其计算耗时难以满足工程需要。在圆阵、方阵等 2 维阵列中, 该问题表现

得更加突出。实际上, 巨大的计算量已成为超分辨空间谱估计技术完全走向实用化的主要瓶颈之一。

快速空间谱估计算法一直是国内外学者研究的热点, 目前主要的研究思路有 3 种。第 1 种是寻找新的计算量小的空间谱估计算法^[3-6], 这类算法的估计性能往往不如 MUSIC 算法, 并且一般只适合均匀线阵, 如 ESPRIT 算法和 Root-MUSIC 算法。第 2 种是对现有的空间谱估计算法进行改进^[7-9], 这类算法实际上是在精度和计算量之间进行折中选择。如文献[7]改用信号子空间实现基于 FFT 的快速 MUSIC 算法, 但降低了谱估计的精度; 文献[8]只降低特征分解的计算量, 却没有降低谱峰搜索的计算量, 改进效果不明显。第 3 种是根据算法的运算流程和特点, 合理设计和配置硬件^[10,11], 这类方法的效果也是有限的, 而且往往是以牺牲硬件成本为代

2012-04-23 收到, 2012-06-13 改回; 2012-06-20 网络优先出版

国家自然科学基金 (61171170) 资助课题

*通信作者: 张兴良 305755450@qq.com

价,如多路并行谱峰搜索法。以上研究成果在一定程度上提高了超分辨空间谱估计算法的计算速度,但是仍然不能满足要求越来越高的现代实时处理要求。

文献[7]分析了 MUSIC 算法计算量大的主要原因:搜索范围大和谱函数复杂,也就是说,谱峰搜索占 MUSIC 算法计算量的绝大部分。谱峰搜索的计算量主要包括乘法和三角函数求值,计算机完成这两种运算的过程都比较复杂,耗时严重。为此,文献[12]利用查表法降低了圆阵列 MUSIC 算法的乘法和三角函数求值次数。但该文献提出的直接查表法对存储量需求大;提出的间接查表法依然保留大量的三角函数求值运算,效果有限。

本文重点研究快速 MUSIC 算法。在减少乘法运算次数的基础上,利用查表法^[13]避免三角函数求值运算;针对查表法需要较大存储量的情况,利用导向矢量的性质对查表法进行了改进。相较于文献[12]的查表法,本文提出的算法既没有三角函数求值运算,又降低了对存储量的需求,且本文的研究范围包括均匀线阵和均匀圆阵两种阵列。本文第2节深入研究阵列的内在特征,获得导向矢量的内在性质;第3节去除蕴含在 MUSIC 算法中的冗余乘法;第4节介绍查表法;第5节对查表法进行了仿真分析,仿真试验结果令人满意;第6节总结全文。

2 典型阵列分析

虽然 MUSIC 算法对阵列结构没有特殊要求,但为简单起见,工程中都选用具有典型结构的阵列。本文研究的典型阵列包括均匀线阵和均匀圆阵,均匀线阵是典型的1维阵列,均匀圆阵是典型的2维阵列,它们的阵列结构模型分别如图1和图2所示。需要说明的是,本文建立的模型是以下列假设为前提的:

- (1) 入射信号是远场的,且是窄带的;
- (2) 相邻阵元间距小于信号载波波长的一半;
- (3) 接收噪声是平稳高斯白噪声,入射信号互不相关,各阵元接收噪声相互独立,信号与噪声也相互独立。

2.1 均匀线阵

图1中,相邻阵元之间间隔为 d ,阵列入射信号矢量为 $\mathbf{s}(t)$,第 i 个入射信号 $s_i(t)$ 的方位角为 ϕ_i , $\pi/2 \geq \phi_i \geq -\pi/2$;阵列接收噪声矢量为 $\mathbf{n}(t)$, $n_m(t)$ 为阵元 m 的接收噪声。当有 D 个信号入射时,阵列输出信号为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中

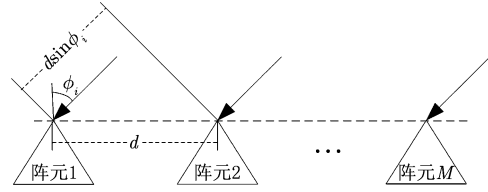


图1 均匀线阵结构图

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_M(t)]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \cdots \ n_M(t)]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \cdots \ s_D(t)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\phi_1) \ \mathbf{a}(\phi_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\phi_D)] \quad (5)$$

$$\mathbf{a}(\phi_i) = [1 \ \exp(j\beta_i) \ \cdots \ \exp(j(M-1)\beta_i)]^T \quad (6)$$

式中, \mathbf{A} 为阵列流型, $\mathbf{a}(\phi_i)$ 为 ϕ_i 方向的导向矢量,

$$\beta_i = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \phi_i。$$

性质1 均匀线阵导向矢量具有共轭对称性,即

$$\mathbf{a}(-\phi_i) = \mathbf{a}^*(\phi_i) \quad (7)$$

证明

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(-\phi_i) &= \left[1 \ \exp\left(j\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(-\phi_i)\right) \ \cdots \right. \\ &\quad \left. \exp\left(j(M-1)\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(-\phi_i)\right) \right]^T \\ &= \left[1 \ \exp\left(j\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\phi_i)\right) \ \cdots \right. \\ &\quad \left. \exp\left(j(M-1)\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\phi_i)\right) \right]^H \\ &= \mathbf{a}^*(\phi_i) \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 均匀圆阵

图2中,圆半径为 r ,信号波长为 λ ,第 i 个信号 $s_i(t)$ 入射方向为 (θ_i, β_i) , θ_i 为方位角, $0 \leq \theta_i < 2\pi$, β_i 为俯仰角, $0 \leq \beta_i < \pi/2$ 。阵列输出信号依然可用式(1)表示,但与均匀线阵不一样,均匀圆阵的阵列流型 \mathbf{A} 包含2维方向信息:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \beta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2, \beta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_D, \beta_D)] \quad (9)$$

$$\mathbf{a}(\theta_i, \beta_i) = \begin{bmatrix} \exp(j\mu \cos(\theta_i - \gamma_1)) \\ \exp(j\mu \cos(\theta_i - \gamma_2)) \\ \vdots \\ \exp(j\mu \cos(\theta_i - \gamma_M)) \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中, $\mu = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \beta_i$, $\gamma_m = \frac{2\pi(m-1)}{M}$ 。

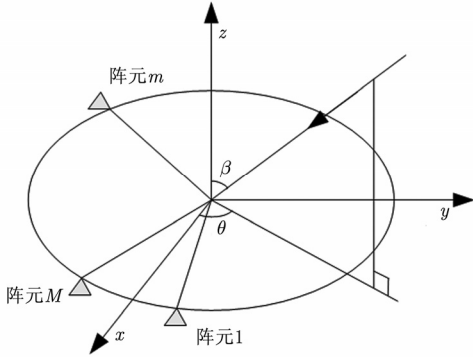


图 2 均匀圆阵列结构图

性质 2 均匀圆阵导向矢量具有对称性，记

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(\theta', \beta) &= \mathbf{a}(\theta' + 2k\pi / M, \beta) \\ &= [\mathbf{a}_k(1) \ \mathbf{a}_k(2) \ \cdots \ \mathbf{a}_k(M)]^T \end{aligned} \quad (11)$$

其中， $k = 0, 1, \dots, M - 1$ ， $0 \leq \theta' < 2\pi / M$ 。其对称性表现在 $\mathbf{a}_k(\theta', \beta)$ 与 $\mathbf{a}_k(2\pi / M - \theta', \beta)$ 之间：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(2\pi / M - \theta', \beta) &= [\mathbf{a}_k(h+1) \ \mathbf{a}_k(h) \ \cdots \ \mathbf{a}_k(1) \ \mathbf{a}_k(M) \ \mathbf{a}_k(M-1) \ \cdots \\ &\quad \mathbf{a}_k(h+2)]^T \end{aligned} \quad (12)$$

其中， $h = (2k + 1)\%M$ ， $\%$ 表示求余。

证明

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(\theta', \beta) &= \mathbf{a}(\theta' + 2k\pi / M, \beta) \\ &= \begin{bmatrix} \exp(j\mu \cos(\theta' + 2(k-0)\pi / M)) \\ \exp(j\mu \cos(\theta' + 2(k-1)\pi / M)) \\ \vdots \\ \exp(j\mu \cos(\theta' + 2(k-(M-1))\pi / M)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(\theta', \beta) &= \begin{bmatrix} \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' + \frac{2k\pi}{M} - \frac{2\pi(1-1)}{M}\right)\right) \\ \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' + \frac{2k\pi}{M} - \frac{2\pi(2-1)}{M}\right)\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' + \frac{2k\pi}{M} - \frac{2\pi(M-1)}{M}\right)\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' - \frac{2\pi(M-k)}{M}\right)\right) \\ \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' - \frac{2\pi(M-k+1)}{M}\right)\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' - \frac{2\pi(M-1)}{M}\right)\right) \\ \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' - \frac{2\pi M}{M}\right)\right) \\ \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' - \frac{2\pi}{M}\right)\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j\mu \cos\left(\theta' - \frac{2\pi(M-1-k)}{M}\right)\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(M-k+1) \\ \mathbf{a}_0(M-k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_0(M) \\ \mathbf{a}_0(1) \\ \mathbf{a}_0(2) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_0(M-k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

由于 $0 \leq 2\pi / M - \theta' < 2\pi / M$ ，将 $\mathbf{a}_k(2\pi / M - \theta', \beta)$ 带入式(10)，可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(2\pi / M - \theta', \beta) &= \mathbf{a}(2(k+1)\pi / M - \theta', \beta) \\ &= \begin{bmatrix} \exp(j\mu \cos(\theta' + 2(-1-k)\pi / M)) \\ \exp(j\mu \cos(\theta' + 2(0-k)\pi / M)) \\ \vdots \\ \exp(j\mu \cos(\theta' + 2(M-2-k)\pi / M)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

比较式(13)、式(14)，可得式(12)的结论。

性质 3 均匀圆阵导向矢量具有周期循环性，周期为 $2\pi / M$ ，即下式成立

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k(1) \\ \mathbf{a}_k(2) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k(M) \end{bmatrix} &= \begin{cases} [\mathbf{a}_0(1) \ \mathbf{a}_0(2) \ \cdots \ \mathbf{a}_0(M)]^T, & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(M-k+1) \\ \mathbf{a}_0(M-k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_0(M) \\ \mathbf{a}_0(1) \\ \mathbf{a}_0(2) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_0(M-k) \end{bmatrix}, & k = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

证明

$k = 0$ 时，上式显然成立。 $k = 1, 2, \dots, M - 1$ 时，则有

证毕

本质上, 性质 1-性质 3 都是由特殊的阵列结构决定的。

3 MUSIC 算法的改进

MUSIC 算法谱函数复杂, 计算量大, 而且包含一些冗余运算^[12]。MUSIC 算法谱函数定义为

$$P_{\text{MU}}(\psi) = \frac{1}{\|\mathbf{E}_N^H \mathbf{a}(\psi)\|_2^2} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\psi) \mathbf{V} \mathbf{a}(\psi)} \quad (17)$$

式中, \mathbf{E}_N 为噪声子空间, ψ 表示搜索方向。 $\mathbf{V} = \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H$ 为 Hermite 矩阵, 即 $\mathbf{V}(i, j) = \mathbf{V}^*(j, i)$, 这说明式(17)中含有冗余乘法运算。本文中, 用 \bullet^* 表示 \bullet 的共轭, 用 $\text{Re}[\bullet]$ 表示 \bullet 的实部, 用 $\text{Im}[\bullet]$ 表示 \bullet 的虚部。对式(17)复数乘法运算进行分解, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^H(\psi) \mathbf{V} \mathbf{a}(\psi) &= \sum_{i=2}^M \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}^*(i) \mathbf{V}(i, j) \mathbf{a}(j) + \sum_{j=2}^M \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{a}^*(i) \\ &\quad \cdot \mathbf{V}(i, j) \mathbf{a}(j) + \sum_{i=1}^M \mathbf{a}^*(i) \mathbf{V}(i, i) \mathbf{a}(i) \\ &= 2 \sum_{i=2}^M \sum_{j=1}^{i-1} \text{Re}[\mathbf{a}^*(i) \mathbf{V}(i, j) \mathbf{a}(j)] + \sum_{k=1}^M \mathbf{V}(k, k) \end{aligned} \quad (18)$$

分别令:

$$\mathbf{S}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{P}_\psi^T & \mathbf{Q}_\psi^T \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_\psi = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_\psi^T(2) & \mathbf{p}_\psi^T(3) & \cdots & \mathbf{p}_\psi^T(M) \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\psi^T(2) & \mathbf{q}_\psi^T(3) & \cdots & \mathbf{q}_\psi^T(M) \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

$$\mathbf{p}_\psi(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_\psi(i, 1) & \mathbf{p}_\psi(i, 2) & \cdots & \mathbf{p}_\psi(i, i-1) \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$\mathbf{q}_\psi(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\psi(i, 1) & \mathbf{q}_\psi(i, 2) & \cdots & \mathbf{q}_\psi(i, i-1) \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

$$\mathbf{p}_\psi(i, j) = \text{Re}[\mathbf{a}(i)] \text{Re}[\mathbf{a}(j)] + \text{Im}[\mathbf{a}(i)] \text{Im}[\mathbf{a}(j)] \quad (24)$$

$$\mathbf{q}_\psi(i, j) = \text{Im}[\mathbf{a}(i)] \text{Re}[\mathbf{a}(j)] - \text{Re}[\mathbf{a}(i)] \text{Im}[\mathbf{a}(j)] \quad (25)$$

再令:

$$\mathbf{V} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M \mathbf{V}(k, k) & 2 \text{Re}[\mathbf{V}^T] & 2 \text{Im}[\mathbf{V}^T] \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

$$\text{Re}[\mathbf{V}] = \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{V}^T(2)] & \text{Re}[\mathbf{V}^T(3)] & \cdots & \text{Re}[\mathbf{V}^T(M)] \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

$$\text{Im}[\mathbf{V}] = \begin{bmatrix} \text{Im}[\mathbf{V}^T(2)] & \text{Im}[\mathbf{V}^T(3)] & \cdots & \text{Im}[\mathbf{V}^T(M)] \end{bmatrix}^T \quad (28)$$

$$\text{Re}[\mathbf{V}(i)] = \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{V}(i, 1)] & \text{Re}[\mathbf{V}(i, 2)] & \cdots & \text{Re}[\mathbf{V}(i, i-1)] \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

$$\text{Im}[\mathbf{V}(i)] = \begin{bmatrix} \text{Im}[\mathbf{V}(i, 1)] & \text{Im}[\mathbf{V}(i, 2)] & \cdots & \text{Im}[\mathbf{V}(i, i-1)] \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

其中, $i = 2, 3, \dots, M$ 。式(19) - 式(30)代入式(18), 再将式(18)代入式(17), 得到

$$P_{\text{MU}}(\psi) = \frac{1}{\mathbf{S}^T(\psi) \mathbf{V} \mathbf{n}} \quad (31)$$

式中, 向量 $\mathbf{V} \mathbf{n}$ 由噪声子空间决定, 向量 $\mathbf{S}(\psi)$ 由搜索方向决定, $\mathbf{V} \mathbf{n}$ 和 $\mathbf{S}(\psi)$ 均为实值向量。表面上, 式(31)已不包含冗余运算, 但实际上并非如此。

3.1 均匀线阵 MUSIC 算法改进

对于均匀线阵, $\psi = \phi$, $\mathbf{S}(\psi)$ 中的元素由 $\mathbf{p}_\psi(i, j)$ 和 $\mathbf{q}_\psi(i, j)$ 组成, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\psi(i, j) &= \text{Re}[\mathbf{a}(i)] \text{Re}[\mathbf{a}(j)] + \text{Im}[\mathbf{a}(i)] \text{Im}[\mathbf{a}(j)] \\ &= \cos[w(i)] \cos[w(j)] + \sin[w(i)] \sin[w(j)] \\ &= \cos[w(i) - w(j)] \end{aligned} \quad (32)$$

式中, $i = 2, 3, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, i-1$, $w(n) = (n-1) \cdot (2\pi d/\lambda) \sin\phi$ 。用 \mathbf{a}_ϕ 表示向量 $\mathbf{a}(\phi)$, 用 $\text{Re}[\mathbf{a}_\phi(i)]$ 和 $\text{Im}[\mathbf{a}_\phi(i)]$ 分别表示 $\mathbf{a}(\phi)$ 中第 i 个元素的实部和虚部, 则

$$\begin{aligned} \cos[w(i) - w(j)] &= \cos[w(n)] = \cos\left[(i-j) \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\phi\right] \\ &= \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(i-j)] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\mathbf{p}_\psi(i) = \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(i)] & \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(i-1)] & \cdots & \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(2)] \end{bmatrix}^T, \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (34)$$

同理可得

$$\mathbf{q}_\psi(i) = \begin{bmatrix} \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(i)] & \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(i-1)] & \cdots & \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(2)] \end{bmatrix}^T, \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (35)$$

由此可见, $\mathbf{S}(\psi)$ 实际上是由 $\mathbf{a}(\phi)$ 的实部和虚部组建, 无需计算即可得到。

显然, \mathbf{P}_ψ 和 \mathbf{Q}_ψ 中具有重复元素, 再令

$$\mathbf{\Omega}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(2)] & \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(3)] & \cdots & \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(M)] \\ \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(2)] & \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(3)] & \cdots & \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(M)] \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M \mathbf{V}(k, k) & \mathbf{u}_p(1) & \mathbf{u}_p(2) & \cdots \\ \mathbf{u}_p(M-1) & \mathbf{u}_q(1) & \mathbf{u}_q(2) & \cdots & \mathbf{u}_q(M-1) \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p(k) &= \sum_{j=1}^{M-k} \text{Re}[\mathbf{V}(j, j-k)] \\ \mathbf{u}_q(k) &= \sum_{j=1}^{M-k} \text{Im}[\mathbf{V}(j, j-k)] \end{aligned}$$

则

$$P_{\text{MU}}(\psi) = \frac{1}{\Omega(\psi)U} \quad (38)$$

式(38)与式(31)计算结果完全一致, 但较式(31)的计算量更少。以 M 元线阵为例, 按式(31)需要 $1 + M^2/2$ 次乘法, 而按式(38)仅需 $2M - 1$ 次乘法运算。

3.2 均匀圆阵 MUSIC 算法改进

对于均匀圆阵, $\psi = (\theta, \beta)$, 同样有 $\mathbf{p}_\psi(i, j) = \cos[w(i) - w(j)]$, 其中, $w(n) = \mu \cos(\theta - \gamma_n)$, 且

$$\begin{aligned} w(i) - w(j) &= \mu \cos(\theta - \gamma_i) - \mu \cos(\theta - \gamma_j) \\ &= -2\mu \sin\left(\frac{\gamma_j - \gamma_i}{2}\right) \sin\left(\frac{2\theta - \gamma_i - \gamma_j}{2}\right) \\ &= 4 \frac{\pi r}{\lambda} \sin(\beta) \sin\left[\pi(i - j)/M\right] \\ &\quad \cdot \sin\left[-\pi(i + j - 2)/M + \theta\right] \end{aligned} \quad (39)$$

令

$$\begin{aligned} \alpha(\beta, k) &= 4\pi r \sin(\beta) \sin(\pi k/M), \\ k &= 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\theta, n) &= \sin(-\pi n/M + \theta), \\ n &= 1, 2, \dots, 2M-3 \end{aligned} \quad (41)$$

可得

$$\mathbf{p}_\psi(i, j) = \cos\left[\frac{1}{\lambda} \alpha(\beta, i - j) \zeta(\theta, i + j - 2)\right] \quad (42)$$

同理

$$\mathbf{q}_\psi(i, j) = \sin\left[\frac{1}{\lambda} \alpha(\beta, i - j) \zeta(\theta, i + j - 2)\right] \quad (43)$$

$\alpha(\beta, k)$ 代表抽样方向的俯仰角信息, $\zeta(\theta, n)$ 代表抽样方向的方位角信息。

以 M 元均匀线阵为例, 计算某个方向的空间谱值, 比较式(17)的标准 MUSIC 算法和式(31)的改进算法, 统计改进前后 MUSIC 算法中乘法运算次数, 表 1 是统计结果。以阵元数 $M = 5$, 信源数 $D = 2$ 为例, 标准 MUSIC 算法需要做 60 次乘法, 而改进后均匀线阵 MUSIC 算法只需要做 11 次, 改进后均匀圆阵只需要做 21 次。可以看出, 通过对 MUSIC 算法的改进降低了乘法运算次数。

表 1 改进前后乘法运算次数

标准 MUSIC 算法	改进后(圆阵)	改进后(线阵)
$4M^2 - 4MD + 2D$	$(M-1)M + 1$	$2M + 1$

4 改进的查表法

MUSIC 算法表示的是连续谱, 但工程中只在有限的离散方向点上计算其离散谱, 称之为离散

MUSIC(Discrete MUSIC, 简称 DMUSIC)算法, DMUSIC 算法与离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, 简称 DFT)的物理意义是相通的。MUSIC 算法的三角函数求值运算量巨大, DMUSIC 算法也是如此, 为降低 DMUSIC 算法的计算量, 可以采用查表的方法代替三角函数求值运算。查表法就是在 DFMUSIC 算法的抽样方向上对 $\Omega(\psi)$ 或 $\mathbf{S}(\psi)$ 进行制表, 运行时再对其进行查表, 从而完全避免了三角函数求值运算。

查表法需要的存储量比较大, 对于 2 维阵列, 其存储量的需求一般都达到数百兆至数吉比特。要扩大查表法的应用范围, 必须降低其存储量需求。前面, 我们给出了典型阵列导向矢量的一些性质, 利用这些性质可以对查表法进行改进, 减少其对存储量的要求。

4.1 均匀线阵情形

对于均匀线阵, 由性质 1 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\psi(i, j) &= \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(i)] \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(j)] + \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(i)] \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(j)] \\ &= \text{Re}[\mathbf{a}_{-\phi}(i)] \text{Re}[\mathbf{a}_{-\phi}(j)] + \text{Im}[\mathbf{a}_{-\phi}(i)] \text{Im}[\mathbf{a}_{-\phi}(j)] \\ &= \mathbf{p}_{-\phi}(i, j) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\psi(i, j) &= \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(i)] \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(j)] - \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(i)] \text{Im}[\mathbf{a}_\phi(j)] \\ &= -[\text{Im}[\mathbf{a}_{-\phi}(i)] \text{Re}[\mathbf{a}_{-\phi}(j)] - \text{Re}[\mathbf{a}_{-\phi}(i)] \text{Im}[\mathbf{a}_{-\phi}(j)]] \\ &= -\mathbf{q}_{-\psi}(i, j) \end{aligned} \quad (45)$$

因此

$$\begin{aligned} \Omega(-\psi) &= \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(2)] & \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(3)] & \dots & \text{Re}[\mathbf{a}_\phi(M)] \\ -\text{Im}[\mathbf{a}_\phi(2)] & -\text{Im}[\mathbf{a}_\phi(3)] & \dots & -\text{Im}[\mathbf{a}_\phi(M)] \end{bmatrix} \\ & \quad (46) \end{aligned}$$

这说明导向矢量的性质传给了 $\Omega(\psi)$, $\Omega(\psi)$ 也具有对称性, 利用该性质可以将存储 $\Omega(\psi)$ 的数据量减少 $1/2$ 。

4.2 均匀圆阵情形

对于均匀圆阵, 记

$$\mathbf{a}_{k-}(2\pi/M - \theta', \beta) = [\mathbf{a}_{k-}(1) \quad \mathbf{a}_{k-}(2) \quad \dots \quad \mathbf{a}_{k-}(M)] \quad (47)$$

用 $\mathbf{p}_k(i, j)$ 和 $\mathbf{q}_k(i, j)$ 分别表示当 $\psi = (\theta' + 2k\pi/M, \beta)$ 时 $\mathbf{S}(\psi)$ 中 \mathbf{P}_ψ 和 \mathbf{Q}_ψ 对应的元素, 用 $\mathbf{p}_{k-}(i, j)$ 和 $\mathbf{q}_{k-}(i, j)$ 分别表示当 $\psi = \left(\frac{2(k+1)\pi}{M} - \theta', \beta\right)$ 时 $\mathbf{S}(\psi)$

中 \mathbf{P}_ψ 和 \mathbf{Q}_ψ 对应的元素。

由性质 2 可得

$$\begin{aligned}
& p_{k-}(i, j) \\
&= \operatorname{Re}[\mathbf{a}_{k-}(i)] \operatorname{Re}[\mathbf{a}_{k-}(j)] + \operatorname{Im}[\mathbf{a}_{k-}(i)] \operatorname{Im}[\mathbf{a}_{k-}(j)] \\
&= \operatorname{Re}[\mathbf{a}_k(h_i)] \operatorname{Re}[\mathbf{a}_k(h_j)] + \operatorname{Im}[\mathbf{a}_k(h_i)] \operatorname{Im}[\mathbf{a}_k(h_j)] \\
&= p_k(h_i, h_j) \tag{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_{k-}(i, j) \\
&= \operatorname{Im}[\mathbf{a}_{k-}(i)] \operatorname{Re}[\mathbf{a}_{k-}(j)] - \operatorname{Re}[\mathbf{a}_{k-}(i)] \operatorname{Im}[\mathbf{a}_{k-}(j)] \\
&= \operatorname{Im}[\mathbf{a}_k(h_i)] \operatorname{Re}[\mathbf{a}_k(h_j)] - \operatorname{Re}[\mathbf{a}_k(h_i)] \operatorname{Im}[\mathbf{a}_k(h_j)] \\
&= \begin{cases} \mathbf{q}_k(h_i, h_j), & h_i > h_j \\ -\mathbf{q}_k(h_i, h_j), & h_i < h_j \end{cases} \tag{49}
\end{aligned}$$

其中, $h_i = (M + h - i) \% M$, $h_j = (M + h - j) \% M$ 。式(48)、式(49)说明 $\mathbf{S}(\psi)$ 内部具有对称性, 由此可以将 $\mathbf{S}(\psi)$ 的存储量减少 1/2。

由性质 3 可以推得 $\mathbf{S}(\psi)$ 内部还具有周期循环性^[12], 利用该性质, 可以将存储 $\mathbf{S}(\psi)$ 的数据量减少为原来的 1/M, 不再赘述。至此, 我们已将均匀圆阵查表法的存储量减少为原来的 1/(2M), 我们称之为改进的查表法。

以五元阵列为例, 按 0.3°步进作谱估计, 4 byte 的数据精度(float 型数据), 均匀线阵和均匀圆阵的存储空间需求见表 2。总体来说, 均匀线阵需要的存储空间非常小, 以 KB 为数量级, 而均匀圆阵需要的存储空间比均匀线阵大很多, 以 MB 为数量级。

表 2 均匀线阵和均匀圆阵的存储空间需求

均匀线阵查表法(byte)	均匀圆阵查表法(byte)
1.2×10^4	2.88×10^6

5 仿真分析

仿真 1 八元均匀线阵, 相邻阵元间隔为 0.15 m, 空间有两个不相关的信号源入射, 入射信号波长为 0.3 m, 入射角度分别为 -45°和 30°, 信噪比为 0 dB, 接收机采样快拍数为 200, 仿真软件为 MATLAB 7.0。做 300 次蒙特卡洛试验, 统计 300 次试验耗时总时间, 见表 3; 标准 MUSIC 算法查表法谱估计结果完全一致, 图 3 是它们某次谱估计的结果。

表 3 谱估计耗时比较(300 次总计)

步进	标准 MUSIC 算法(s)	本文改进的查表法(s)
0.01°	95.158	1.561
0.05°	19.105	0.321
0.1°	9.610	0.156
0.3°	3.173	0.052

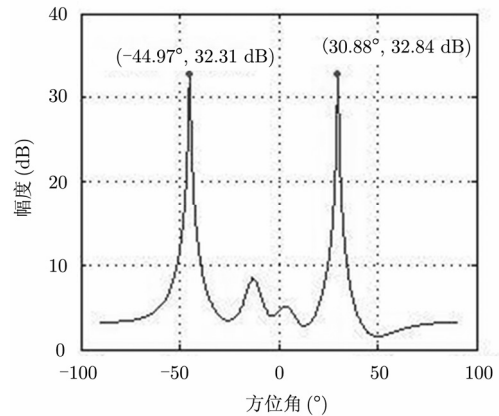


图 3 均匀线阵空间谱估计(0.01°步进)

纵向比较, 理论上, 0.01°步进耗时是 0.05°步进的 5 倍、是 1°步进的 10 倍、是 0.3°步进的 30 倍, 实际耗时倍数与理论耗时倍数基本一致。横向比较, 标准 MUSIC 算法谱估计耗时超过查表法的 60 倍, 查表法的优势非常明显。可以看出, 精确谱估计需要的代价很大, 实时性较差; 标准 MUSIC 算法很难满足工程需要, 但是本文的查表法大幅提高了 MUSIC 算法的实时性。

仿真 2 五元均匀圆阵, 半径为 0.15 m, 空间有两个不相关信号源, 波长为 0.3 m, 来波方向分别为 (60°, 30°)和(240°, 30°), 信噪比为 0 dB, 方位角步进和俯仰角步进相同, 接收机采样快拍数为 200。为比较标准 MUSIC 算法、改进的查表法和文献[12]提出的两种查表法: 直接查表法、间接查表法, 利用 Visual C++6.0 进行 100 次实验, 统计谱估计平均耗时, 结果见表 4; 将谱估计结果保存到文件中, 利用 MATLAB 软件观看谱估计结果, 4 种谱估计算法结果完全一致, 图 4 是谱估计结果。

表 4 谱估计耗时比较(100 次平均)

步进	标准 MUSIC 算法(s)	本文改进的查表法(s)	文献[12]直接查表法(s)	文献[12]间接查表法(s)
0.1°	63.621	1.136	1.134	6.236
0.3°	7.082	0.124	0.125	0.694
0.5°	2.634	0.047	0.048	0.252
1.0°	0.646	0.012	0.013	0.060

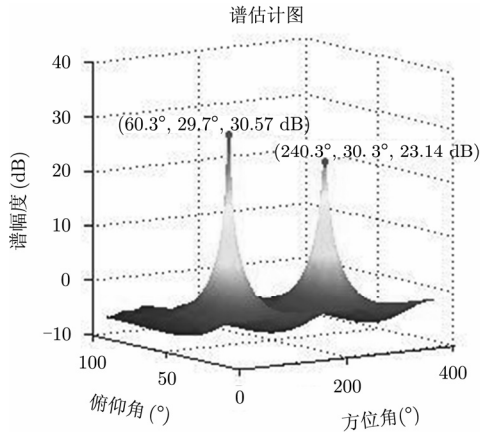


图 4 圆阵空间谱估计(0.3°步进)

纵向比较，可以获得和仿真 1 相同的结论。横向比较，改进的查表法和直接查表法谱估计耗时相近；标准 MUSIC 算法谱估计耗时是改进查表法和直接查表法的 50–60 倍，是间接查表法的 10 倍以上。标准 MUSIC 算法耗时最为严重，间接查表法次之，直接查表法和改进的查表法耗时最少。通过谱估计图可以看出改进的查表法谱估计准确性较好。

仿真 3 五元均匀圆阵，半径为 0.15 m，假设入射信号波长为 0.3 m，方位角步进和俯仰角步进相同，采用 Visual C++6.0 软件编程。用自编的函数 Nnew 对库函数 new 进行封装，用以统计查表法制表所占用的内存，数据类型为 float 型，统计结果见表 5。

表 5 制表占用内存大小比较

步进	本文改进的查表法 (byte)	文献 [12] 直接查表法 (byte)	文献 [12] 间接查表法 (byte)
0.1°	25.92×10^6	51.84×10^6	1.0368×10^5
0.3°	2.88×10^6	5.76×10^6	1.152×10^4
0.5°	1.0368×10^6	2.0736×10^6	0.415×10^4

从统计结果可以看出，直接查表法占用内存是改进查表法的两倍，而间接查表法仅需很小的内存。随着谱估计精度的提高，查表法占用的空间急剧增加。精确谱估计的代价不仅表现在时间上，也表现在所占用的内存空间上。

6 总结

以往快速高分辨空间谱估计算法没有从根本上解决计算量问题，查表法提供了一种可行的途径。通过分析均匀线阵和均匀圆阵两种典型阵列的阵列结构，发现均匀线阵导向矢量具有共轭对称性，均

匀圆阵导向矢量具有周期循环性和对称性；在降低 MUSIC 算法的乘法运算次数的基础上，对查表法进行改进。改进的查表法利用导向矢量的性质降低了查表法对存储量的需求，同时保持了较快的运算速率。

本文以 MUSIC 算法为例，提出降低计算量的一种思路，该思路可以推广到其它空间谱估计算法中。要进一步提高空间谱估计算法的实时处理能力还可以从多方面改进，如根据不同方向的分辨率^[14]调整搜索步进、利用先验知识缩小搜索范围等。

参考文献

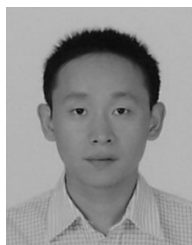
- [1] 张小飞, 汪飞, 徐大专. 阵列信号处理的理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010, 第4.3节.
Zhang Xiao-fei, Wang Fei, and Xu Da-zhuan. Array Signal Processing Theory and Application[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010, Section 4.3.
- [2] 郭跃. 超分辨波达方向估计技术的研究[D]. [博士论文], 华中科技大学, 2007: 4-5.
Guo Yue. Research on direction of arrival estimation with super resolution[D]. [Ph.D. dissertation], Huazhong University of Science and Technology, 2007: 4-5.
- [3] Zhuang Jie, Li Wei, and Manikas A. An IDFT-based root-MUSIC for arbitrary arrays[C]. 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Dallas, Texas, USA, May 22-27, 2010: 2613-2617.
- [4] Tripathy Praveen, Srivastava S C, and Singh S N. A modified TLS-ESPRIT-Based method for low-frequency mode identification in power systems utilizing synchrophasor measurements[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2011, 26(2): 719-727.
- [5] 庄学彬, 陆明泉, 冯振明. 一种数值稳健且低复杂度的信号子空间估计新方法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(1): 90-94.
Zhuang Xue-bin, Lu Ming-quan, and Feng Zhen-ming. A numerically robust and low-complexity method of signal subspace estimation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(1): 90-94.
- [6] Azarbar A and Dadashzadeh G. A new DOA estimation based on direct data domain algorithm[C]. 2011 IEEE GCC Conference and Exhibition, Dubai, United Arab Emirates, Feb. 19-22, 2011: 205-208.
- [7] Paine A S. Fast MUSIC for large 2-D element digitised phased array radar[C]. 2003 IEEE Rader Conference, Adelaide, Australia, May 5-8, 2003: 200-205.
- [8] Liu Lu-tao, Si Xi-cai, and Wang Li-guo. Fast subspace DOA algorithm based on time-frequency distributions without eigen decomposition[C]. 3rd International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, Shanghai, China, Jan. 6-7, 2011, 2: 170-173.

- [9] 邓键敏, 吴瑛. 基于MH抽样逐次搜索的快速MUSIC算法[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(20): 4508-4511.
Deng Jian-min and Wu Ying. Fast MUSIC algorithm via metropolis-hastings sampler and sequential searching[J]. *Computer Engineering and Design*, 2010, 31(20): 4508-4511.
- [10] Minseok Kim, Koichi Ichige, and Hiroyuki Arai. Implementation of FPGA based fast DOA estimator using unitary MUSIC algorithm [C]. 2009 IEEE Rader Conference, California, USA, Apr. 20-22, 2009: 4-8.
- [11] 董照飞. 基于DSP的MUSIC算法的实现[J]. 现代电子技术, 2006, 23(7): 21-23.
Dong Zhao-fei. The realization of MUSIC arithmetic based on DSP[J]. *Modern Electronics Technique*, 2006, 23(7): 21-23.
- [12] 张兴良, 阮怀林, 王树亮. 圆阵列MUSIC算法快速测向技术[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(3): 374-378.
Zhang Xing-liang, Ruan Huai-lin, and Wang Shu-liang. A fast direction finding technology based on MUSIC algorithm with circular array[J]. *Journal of Data Acquisition & Processing*, 2011, 26(3): 374-378.
- [13] Wang X and Zhang X P. Optimal look-up table-based data hiding[J]. *IET on Signal Processing*, 2011, 5(2): 171-179.
- [14] Zhang Q T. Probability of resolution of the MUSIC algorithm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(4): 978-987.

作者简介



张兴良(1985-), 男, 安徽合肥人, 博士生, 研究方向为雷达信号处理、智能天线。
E-mail: tianyawubian@sina.com



樊甫华(1975-), 男, 安徽芜湖人, 讲师, 研究方向为雷达信号处理。
E-mail: davidfancei@163.com



王可人(1957-), 男, 江苏镇江人, 教授, 博士生导师, 总参某站主任, 研究方向为通信信号处理、雷达信号处理。
E-mail: wangkeren0512@126.com