

## 基于分式二次规划的互模糊函数赋形方法

杨晨<sup>①</sup> 吴蕾<sup>②</sup> 杨威<sup>\*①</sup> 姜卫东<sup>①</sup> 刘永祥<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(国防科技大学电子科学学院 长沙 410073)

<sup>②</sup>(北京跟踪与通信技术研究所 北京 100094)

**摘要:** 在开展认知雷达波形设计时, 由于发射波形与接收滤波器的非匹配体制, 互模糊函数赋形相比传统模糊函数赋形优化自由度更高。该文针对强杂波条件下微弱运动目标检测问题, 以最大化信干噪比为优化准则, 提出了一种联合发射相位编码序列与接收滤波器设计的互模糊函数赋形方法。在恒模约束下, 优化问题被建模为二次分式规划形式; 然后通过引入辅助变量, 并利用共轭梯度法求解Stiefel流形空间上的最小化问题, 非凸优化据此转化为恒模约束二次优化问题; 通过交替循环和类幂迭代算法求得最优解。此外考虑到发射波形受硬件限制而难以实现严格恒模, 该文构建了一种低峰均比约束二次优化问题模型, 并利用最近邻向量法求得最优解。最后, 不同参数下的仿真与实测数据实验表明, 该文赋形方法相较于传统方法具有较高的信干噪比增益和收敛速度。

**关键词:** 认知雷达; 波形设计; 互模糊函数; 信干噪比最大化; 恒模约束; 低峰均比约束

中图分类号: TN957

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2024)01-0174-13

DOI: 10.12000/JR23126

**引用格式:** 杨晨, 吴蕾, 杨威, 等. 基于分式二次规划的互模糊函数赋形方法[J]. 雷达学报(中英文), 2024, 13(1): 174–186. doi: 10.12000/JR23126.

**Reference format:** YANG Chen, WU Lei, YANG Wei, *et al.* Cross-ambiguity function shaping through fractional quadratic programming[J]. *Journal of Radars*, 2024, 13(1): 174–186. doi: 10.12000/JR23126.

## Cross-ambiguity Function Shaping Through Fractional Quadratic Programming

YANG Chen<sup>①</sup> WU Lei<sup>②</sup> YANG Wei<sup>\*①</sup> JIANG Weidong<sup>①</sup> LIU Yongxiang<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

<sup>②</sup>(Beijing Institute of Tracking and Telecommunication Technology, Beijing 100094, China)

**Abstract:** Due to the mismatch between transmit waveforms and receive filters, Cross-Ambiguity Function (CAF) shaping plays an important role in the design of cognitive radar waveforms and allows more freedom for waveform optimization problem than conventional ambiguity function shaping. A CAF shaping method is proposed for designing phase-shift keying transmit waveforms and receive filters jointly to maximize the output Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio (SINR), thereby solving the problem of weakening-moving target detection under strong clutter conditions. The optimization problem is first modeled as a quadratic fractional programming problem under the Constant Modulus (CM) constraint of the transmit waveform. The conjugated gradient method is utilized to solve the minimization problem of the Stiefel manifold space through the introduction of auxiliary variables; furthermore the nonconvex optimization problem is converted into a unimodular quadratic programming problem. An algorithm based on alternately iterative maximization and

收稿日期: 2023-07-11; 改回日期: 2023-09-08; 网络出版: 2023-10-07

\*通信作者: 杨威 yw850716@sina.com \*Corresponding Author: YANG Wei, yw850716@sina.com

基金项目: 国家自然科学基金(61871384), 湖南省科技创新计划自主项目(2022RC1092), 国防科技大学自主创新科学基金项目(22-ZZCX-043)  
Foundation Items: The National Natural Foundation of China (61871384), The Science and Technology Innovation Program of Hunan Province (2022RC1092), The Science Technology Innovation Program of National Defense University (22-ZZCX-043)

责任编辑: 崔国龙 Corresponding Editor: CUI Guolong

©The Author(s) 2023. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License

(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

power method-like iteration is proposed to solve the quadratic optimization problem. Since transmit waveforms are limited by hardware and achieving CM is difficult, the nearest vector method is employed under the constraint of a low peak-to-average power ratio. Finally, the experiments with simulated and real measured data under different parameters reveal that the transmit waveforms and receive filters designed using the proposed method exhibit better SINR performance and faster convergence speed compared with other existing algorithms.

**Key words:** Cognitive radar; Waveform design; Cross-Ambiguity Function (CAF); Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio (SINR) maximization; Constant modulus constraints; Low Peak-to-Average power Ratio (PAR) constraints

## 1 引言

在微弱目标检测问题中, 信号相关杂波是发射信号经不同于目标的延时和多普勒频率的无关回波。由于其与目标回波具有强相似性, 极易对检测造成影响。为了改善信号相关杂波下波形设计性能, 文献[1]在假设脉冲内多普勒可以忽略不计的情况下, 建立了相邻距离单元杂波下的回波离散模型, 并根据目标和杂波在距离维的差异性, 研究了基于最小化均方误差(Mean Square Error, MSE)准则的发射波形与接收滤波器联合设计问题。然而, 在平台与目标之间存在快速运动的情况下, 多普勒频率通常不可忽略。因此上述问题模型应进行修改以适应多普勒频率的展宽, 同时问题模型的维度也应从距离维升高到二维模糊函数(Ambiguity Function, AF)<sup>[2]</sup>。

AF被定义为对具有不同时延和归一化多普勒频率的波形的匹配滤波器输出响应函数。AF是进行波形设计与分析的有效工具, 其可以有效揭示雷达系统的距离多普勒分辨率, 同时还可以用来评估波形的抗干扰性能<sup>[3]</sup>。理想的雷达测量系统的AF要求在目标所处距离-多普勒单元处具有单一峰值, 但由于AF的等体积特性, 实际波形通常难以满足上述要求<sup>[4]</sup>。不少研究选择通过AF赋形方法提高雷达系统的目标检测性能<sup>[5-22]</sup>。具体来说, 认知雷达系统可以通过动态环境数据库和存储在平台中的环境信息来预测实际的散射环境<sup>[6]</sup>, 从而使波形在先验干扰散射点所处距离-多普勒单元上的响应尽可能小, 在目标所处距离-多普勒单元上的响应尽可能高。

AF赋形方法中发射序列一般采用相位编码序列。根据发射序列的相位编码特性, 通常模糊函数设计可以分为快时间维模糊函数设计和慢时间维模糊函数(Slow Time Ambiguity Function, STAF)设计。快时间发射波形是指包含一系列子脉冲的发射波形, 文献[5]提出了一种加速序列迭代优化方法(Accelerated Iterative Sequential Optimization, AISO)实现局部模糊函数赋形, 通过最小化特定距

离-多普勒单元的加权积分旁瓣电平(Weighted Integrated Sidelobe Level, WISL), 提高雷达系统对指定区域的目标探测能力。其结果与文献[7,8]的梯度算法相比, 具有更低的旁瓣与更快的收敛速度。文献[9]研究了具有理想AF形状的恒模快时间维发射波形与接收滤波器联合设计问题, 在有限的信噪比损失约束条件下, 通过交替迭代以及MM (Majorization-Minimization)算法实现了WISL和互补积分旁瓣电平(Complementary Integrated Sidelobe Level, CISL)的最小化, 并在硬件系统上对所设计波形性能进行验证。

慢时间发射波形是指由恒定脉冲重复间隔(Pulse Repetition Interval, PRI)的一系列脉冲组成的信号, 其对应的距离-多普勒响应可以理解为STAF。文献[10]首先提出了STAF赋形的概念, 其主要思想为最小化发射波形AF在某些特定单元的平均值, 并且通过最大块改进方法(Maximum Block Improvement, MBI)以及共轭超对称四阶张量理论, 解决了问题模型带来的四阶多项式优化难题。针对上述模型带来的复杂多项式, 文献[11]还提出了一种四次黎曼信赖域算法, 其首先将问题模型转化为复圆黎曼流形上的无约束优化问题, 然后设计一种新的黎曼信赖域优化算法以求得迭代解。文献[12]在峰值平均功率比(Peak-to-Average power Ratio, PAR)约束下, 以最大化信干噪比(Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio, SINR)为准则, 同样构造了一个复杂四次函数优化问题。同时, 提出一种将MM与坐标下降(Coordinate Descent, CD)相结合的方法, 解决了恒模(Constant Modulus, CM)约束下的慢时间维AF设计问题。

为了充分利用雷达联合收发处理的自由度, 基于非匹配滤波体制, 文献[13]引入发射波形与接收滤波器失配的互模糊函数(Cross-Ambiguity Function, CAF)设计概念, 设计的序列可以用作发射波形与接收滤波器, 也可用于MIMO雷达。文献[14]针对低旁瓣CAF设计所带来的高阶多项式优化(High-Order Polynomial, HOP)问题, 提出了一种

广义MBI方法, 通过为原线性张量函数设计等效多项式函数, 降低了计算复杂度。文献[15]研究了离散与连续CAF赋形问题, 通过设计一对发射波形与接收滤波器, 最小化与既定CAF之间的累计平方误差。与此同时, 该方法还对模板所关注的区域加大了权重, 然而权重项的加入导致优化问题难度增大, 因此文献[15]忽略了发射波形的PAR约束。

在CAF赋形问题中, 倘若以最大化SINR为优化准则, 目标函数经化简通常为二次分式形式。前期文献[15,18]中的常规解决方法是利用丁克尔巴赫算法将其化为多项式形式, 再利用MM算法等优化方法求解。基于此研究背景, 为了增强波形对微弱运动目标的检测能力, 同时提高其运算效率, 本文研究了一种发射波形与接收滤波器CAF赋形策略, 并提出了一种高效迭代求解方法。其基本思路是在信号相关杂波背景下, 选取最大化接收端SINR为优化准则, 同时为了保证最大化雷达发射机功率效率, 在优化模型中引入CM约束, 通过对发射与接收滤波器的交替迭代优化求得最优解。对于模型所带来的NP (Non-deterministic Polynomial) 难分式二次规划(Fractional Quadratic Programming, FQP)问题, 本文将其转化为单模二次规划(Unimodular Quadratic Programming, UQP)问题, 并通过类幂迭代(Power Method-Like, PML)方法进行求解。此外, 为了使波形具有更高的自由度和更好的实用性, 在该模型下进一步考虑了低PAR约束下的优化问题, 并且通过最近邻向量法求解最优的发射波形与接收滤波器。最后, 实验仿真与实测数据表明, 相对于经典CAF赋形方法, 本文设计的发射波形与接收滤波器能实现更高的SINR值, 同时具有较低的运算复杂度。

## 2 问题模型

$\mathbf{x} = [x(1), x(2), \dots, x(N)]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  为单基地雷达系统在一个脉冲重复间隔内发射的码长为  $N$  的波形,  $(\cdot)^T$  代表矩阵的转置, 则接收端的  $N$  维观测向量  $\mathbf{r} = [r(1), r(2), \dots, r(N)]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ ,  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{C}$  分别代表实数域和复数域, 可以表示为[15]

$$\mathbf{r} = \alpha_{\text{target}} \mathbf{x} \odot \mathbf{p}(v_{\text{target}}) + \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中,  $\alpha_{\text{target}}$  是与目标相关的复参数;  $\odot$  代表哈达玛积;  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  是杂波干扰回波,  $\mathcal{N}$  代表变量服从正态分布。  $N$  维向量  $\mathbf{p}(v_{\text{doppler}}) = [1, e^{j2\pi v_{\text{doppler}}}, \dots, e^{j2\pi(N-1)v_{\text{doppler}}}]^T$  是多普勒导向矢量,  $v_{\text{doppler}}$  代表归

一化多普勒频率。为便于区分, 用  $v_{\text{target}}$  表示目标的归一化多普勒频率。  $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$  代表噪声向量。杂波干扰回波  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  可以表示为

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_s} \rho_m \mathbf{J}^{r_m} (\mathbf{x} \odot \mathbf{p}(v_{\text{doppler}_m})) \quad (2)$$

其中,  $N_s$  是干扰点数量,  $\rho_m$  代表第  $m$  个干扰散射点的回波复幅度,  $v_{\text{doppler}_m}$  是第  $m$  个干扰散射点的归一化多普勒频率。归一化即为将多普勒频率区间均匀分为  $N_v$  份, 设置目标的多普勒频率  $v_{\text{target}} = 0$ , 并将干扰的多普勒频率归一化到目标上。  $r_m$  是第  $m$  个干扰散射点所处距离单元,  $\mathbf{J}^r \in \mathbb{C}^{N \times N}$  是移位矩阵, 其第  $(a, b)$  个元素定义为[11]

$$\mathbf{J}^r(a, b) = \begin{cases} 1, & a-b=r \\ 0, & a-b \neq r \end{cases}, a \in \{1, 2, \dots, N\}, b \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3)$$

为了提升回波经信号处理后的信干噪比, 针对接收回波信号设计非匹配滤波器  $\mathbf{h} = [h(1), h(2), \dots, h(N)]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ ,  $(\cdot)^H$  代表矩阵的共轭转置, 非匹配滤波输出信号可以表示为

$$\mathbf{h}^H \mathbf{r} = \mathbf{h}^H \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \mathbf{x} + \mathbf{h}^H \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^H \mathbf{n} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{P}(v_{\text{target}}) = \text{diag}(p(v_{\text{target}}))$ ,  $\text{diag}(\cdot)$  表示对向量构造对角矩阵。

由于干扰  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  与噪声  $\mathbf{n}$  不相关, 式(4)中干扰噪声部分能量可以近似用  $C(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}$  表示为

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{h}) &= \mathbb{E} \left[ \left| \mathbf{h}^H \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^H \mathbf{n} \right|^2 \right] \\ &\approx \mathbf{h}^H \left[ \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{h=1}^{N_v} \sigma^2(r, h) \left| \mathbf{J}^r \mathbf{P}(v_h) \mathbf{x} \right|^2 \right] \mathbf{h} \\ &\quad + \sigma_n^2 \|\mathbf{h}\|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $\mathbb{E}[\cdot]$  表示数学期望,  $\|\cdot\|$  代表向量的欧几里得范数,  $\sigma(r, h)$  代表干扰在第  $r$  个距离单元, 第  $h$  个多普勒单元上的能量分布, 且当该距离单元为干扰散射点时,  $\sigma^2(r, h) = \rho_m^2$ ,  $v_h = -\frac{1}{2} + \frac{h}{N_v}$ ,  $h = 1, 2, \dots, N_v$ ,  $\mathbf{P}(v_h) = \text{diag}(p(v_h))$ 。

假设目标的回波能量可以表示为  $G(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \left| \mathbf{h}^H \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \mathbf{x} \right|^2 \quad (6)$$

当发射端信号  $\mathbf{x}$  满足恒模约束时, 接收端信干噪比可以表示为

$$\begin{aligned} \text{SINR} &= \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{h})}{C(\mathbf{x}, \mathbf{h})} = \frac{|\mathbf{h}^H \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \mathbf{x}|^2}{\mathbf{h}^H \left( \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{h=1}^{N_v} \sigma^2(r, h) \mathbf{J}^r \mathbf{P}(v_h) \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{P}^H(v_h) (\mathbf{J}^r)^H \right) \mathbf{h} + \sigma_n^2 \|\mathbf{h}\|^2} \\ &= \frac{|\mathbf{h}^H \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \mathbf{x}|^2}{\mathbf{x}^H \left( \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{h=1}^{N_v} \sigma^2(r, h) \mathbf{P}^H(v_h) (\mathbf{J}^r)^H \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{J}^r \mathbf{P}(v_h) \right) \mathbf{x} + \sigma_n^2 \|\mathbf{h}\|^2} = \frac{|\mathbf{h}^H \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \mathbf{x}|^2}{\mathbf{x}^H \left[ \mathbf{W} + \frac{1}{E_x} \sigma_n^2 \|\mathbf{h}\|^2 \mathbf{I}_N \right] \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{W} = \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{h=1}^{N_v} \sigma^2(r, h) \mathbf{P}^H(v_h) (\mathbf{J}^r)^H \cdot \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{J}^r \mathbf{P}(v_h)$ ,  $E_x$  为发射波形  $\mathbf{x}$  的能量,  $\mathbf{I}_N$  代表  $N \times N$  的单位矩阵。

在发射波形满足恒模约束的条件下, 通过设计发射信号与接收滤波器的互模糊赋形方法, 最大化信干噪比的问题模型可以表示为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \quad & \text{SINR} \\ \text{s.t.} \quad & |x_n| = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

值得说明的是, 以上模型可同时适用于快慢时间维波形设计。在雷达信号处理过程中, 假设一个相参处理时间内 (Coherence Processing Interval, CPI) 所包含的 PRI 为  $L$ , 一个 PRI 内编码  $\mathbf{x}_i$  长度为  $N$ ,  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_L] \in \mathbb{C}^{N \times L}$  为一个 CPI 内发射信号, 其中  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  为第  $i$  个 PRI 内的相位编码信号, 而  $\mathbf{y} = [x_{11}, x_{21}, \dots, x_{N1}] \in \mathbb{C}^{1 \times N}$  是一个 CPI 内所有 PRI 的初始相位编码。对于快时间维波形设计模型, 如前文所述, 设计的发射波形为  $\mathbf{x}_i$ 。而对于慢时间维波形设计, 匹配滤波变为慢时间维匹配滤波, 移位矩阵  $\mathbf{J}^r$  中的参数  $r$  不再代表每个距离单元的移位, 而是每个 PRI 对应距离的移位, 但仍可应用本文的波形设计方法。

### 3 基于 PML 方法的模型求解

#### 3.1 恒模约束下发射波形与接收滤波器设计

由于式(8)中包含两个待优化变量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{h}$ , 可采用一种交替迭代的优化方法。将式(8)作如下简单变换:

$$\text{SINR} = \frac{|\mathbf{h}^H \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \mathbf{x}|^2}{\mathbf{h}^H \mathbf{L} \mathbf{h}} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{h=1}^{N_v} \sigma^2(r, h) \mathbf{J}^r \mathbf{P}(v_h) \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{P}^H(v_h) (\mathbf{J}^r)^H \\ &\quad + \frac{1}{N} \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \end{aligned} \quad (10)$$

对于确定性发射信号  $\mathbf{x}$ , 使目标函数最大的  $\mathbf{h}$  的最优闭式解为<sup>[23]</sup>

$$\mathbf{h} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \mathbf{x} \quad (11)$$

对于固定  $\mathbf{h}$ , 最大化 SINR 对应发射波形  $\mathbf{x}$  可以通过如下方法求出。式(8)中的目标函数可写成分式二次规划形式:

$$\max \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x}} \quad (12)$$

其中,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}(v_{\text{target}})^H \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{P}(v_{\text{target}}) \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{W} + \frac{1}{N} \sigma_n^2 \|\mathbf{h}\|^2 \mathbf{I}_N \quad (14)$$

式(12)是一个 NP 难的非凸优化问题, 运用类幂迭代方法可高效解决此类问题<sup>[24]</sup>。

首先将问题模型式(12)变为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : \max_{\mathbf{x}} \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & |x_n| = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ & \lambda = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (15)$$

$\mathcal{P}_1$  的第 2 个约束条件可以等价变换为

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^H [\mathbf{A}^{1/2}]^H \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H [\mathbf{B}^{1/2}]^H \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}\|_2^2} \quad (16)$$

式(16)成立时,  $\|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2^2 = \lambda \|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}\|_2^2$  成立, 也即  $\|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\lambda} \|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}\|_2$  成立。将约束条件加入到目标函数中, 可得新问题模型:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 : \max_{\mathbf{x}, \lambda} \quad & \lambda - \mu \left( \|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2 - \sqrt{\lambda} \|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}\|_2 \right)^2 \\ \text{s.t.} \quad & |x_n| = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N; \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\mu$  表示添加到原问题  $\mathcal{P}_1$  的目标函数的惩罚项的权重, 当  $\mu \rightarrow \infty$  时,  $\mathcal{P}_2$  和  $\mathcal{P}_1$  完全相同。

将式(17)目标函数写成关于  $\mathbf{x}$  的二次函数形式,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 : \max_{\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{U}} \quad & \lambda - \mu \left\| \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x} - \sqrt{\lambda} \mathbf{U} \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} \right\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & |x_n| = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N; \lambda \geq 0 \\ & \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_N \end{aligned} \quad (18)$$

其中, 酉矩阵  $\mathbf{U}$  是在不改变模长的前提下将向量  $\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}$  旋转到与  $\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}$  相同的方向, 即式(19)成立:

$$\mathbf{U} \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} = \left( \frac{\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}}{\|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2} \right) \|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}\|_2 \quad (19)$$

将式(19)代入式(18), 易证问题模型 $\mathcal{P}_3$ 与 $\mathcal{P}_2$ 等价。

通过求解式(19), 可以得到矩阵 $\mathbf{U}$ , 进而可以求解问题模型 $\mathcal{P}_3$ 。对于酉矩阵 $\mathbf{U}$ , 直接求解式(19)不易, 故可以将式(19)成立等效为等式左边和右边差值的二范数的平方最小, 同时限制优化变量 $\mathbf{U}$ 为酉矩阵。即求解 $\mathbf{U}$ 可等效于求解子问题 $\mathcal{P}_4$ :

$$\mathcal{P}_4: \min_{\mathbf{U}} \left\| \mathbf{U} \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} - \left( \frac{\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}}{\|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2} \right) \left\| \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} \right\|_2 \right\|_2^2$$

$$\text{s.t. } \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_N \quad (20)$$

$\mathcal{P}_4$ 是只有正交约束的最小化问题, 优化变量是矩阵 $\mathbf{U}$ , 其所在解空间集合称为Stiefel流形, 用符号 $St(n, r) = \{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times N} : \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_N\}$ 表示<sup>[25]</sup>。对于 $\mathcal{P}_4$ , 可以在流形空间 $St(n, r)$ 上通过共轭梯度下降法求解。

求解子问题 $\mathcal{P}_4$ 得到酉矩阵 $\mathbf{U}$ , 对于确定的 $\lambda$ 和 $\mathbf{U}$ ,  $\mathcal{P}_3$ 可以看成是一个二次规划问题, 即

$$\min \mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (21)$$

其中,

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}) - \sqrt{\lambda} \left( \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{U} \mathbf{B}^{1/2} + \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{A}^{1/2} \right) \quad (22)$$

设 $\hat{\mathbf{Q}} \triangleq \gamma \mathbf{I} - \mathbf{Q}$ , 其中 $\gamma$ 大于 $\mathbf{Q}$ 的最大特征值, 保证 $\hat{\mathbf{Q}}$ 正定, 则式(21)可以写作:

$$\mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x} = -\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \gamma N \quad (23)$$

因此式(21)可以进一步转化为恒模二次规划问题:

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^H \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } |\mathbf{x}_n| = 1, n = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

求解式(24)即寻找式(25)问题的最优解<sup>[23]</sup>:

$$\min_{\mathbf{x}^{(s+1)}} \left\| \mathbf{x}^{(s+1)} - \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x}^{(s)} \right\|_2$$

$$\text{s.t. } |\mathbf{x}_n^{s+1}| = 1, n = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

其中, 式(25)的解是类幂迭代形式<sup>[16]</sup>:

$$\mathbf{x}^{(s+1)} = e^{j \arg(\hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x}^{(s)})} \quad (26)$$

$\arg(\mathbf{x})$ 分别代表 $\mathbf{x}$ 的相位。关于类幂迭代方法对目标函数的递增性质, 文献<sup>[23]</sup>已给出证明。

上述求解方法前提是给定 $\lambda$ 和 $\mu$ , 下面给出参数 $\lambda$ 和 $\mu$ 的确定方法。当 $\mathbf{U}$ 与 $\mathbf{x}$ 确定时,  $\mathcal{P}_3$ 问题转化为

$$\max_{\lambda} \lambda - \mu \left\| \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x} - \sqrt{\lambda} \mathbf{U} \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} \right\|_2^2$$

$$\text{s.t. } \lambda \geq 0 \quad (27)$$

根据简单求导运算, 易证上述二次优化问题的最优解为

$$\sqrt{\lambda^*} = \frac{\kappa \left\| \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} \right\|_2^2}{\left\| \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} \right\|_2^2 - \frac{1}{\mu}} \quad (28)$$

其中,  $\kappa^2 = \|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2^2 / \|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}\|_2^2$ 。可以注意到, 当参数 $\mu$ 足够大时,  $\lambda$ 会收敛到一个固定的值。

对于 $\mu$ 值, 当其满足条件:

$$\mu > (\mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x})^{-1} \quad (29)$$

可以保证优化式(27)的收敛性, 达到收敛上界式(28)。

上文已说明为保证问题收敛性,  $\mu$ 的取值存在下界, 同时 $\mu$ 的取值也不能过大。当 $\lambda$ 为定值, 式(27)变为针对 $\mathbf{x}$ 的优化问题, 由式(28)可知, 优化过程中,  $\kappa$ 的取值应趋近于 $\lambda_{\text{optimal}}$ 。但 $\kappa$ 的取值恒小于 $\lambda_{\text{optimal}}$ 。故针对 $\lambda$ 的优化过程,  $\kappa$ 的取值增大影响 $\lambda_{\text{optimal}}$ 增大,  $\lambda_{\text{optimal}}$ 增大又趋使 $\kappa$ 的上界继续增大, 直到收敛。且由式(28)可以看出, 若 $\mu$ 过大,  $\kappa$ 趋近于 $\lambda_{\text{optimal}}$ 的速度会变得缓慢, 因此过大的 $\mu$ 会影响运算速度。

根据上述过程, 基于分式二次规划的发射接收联合互模糊函数赋形算法流程总结为算法1。其中, 相邻两次迭代的内外层迭代误差分别记为error1和error2。外层迭代误差error1表达式为

$$\text{error1} = \frac{|\text{SINR}_{\text{update}} - \text{SINR}_{\text{before}}|}{\text{SINR}_{\text{before}}} \quad (30)$$

算法1 基于PML的恒模发射波形与接收滤波器联合

#### 互模糊函数设计

Alg. 1 CAF shaping for CM transmit waveforms and receive filters based on PML

---

输入: 干扰能量分布矩阵 $\sigma$ , 噪声能量 $\sigma_n$ , 目标散射系数 $\alpha_{\text{target}}$   
 输出: 优化发射波形 $\mathbf{x}$ , 优化接收滤波器 $\mathbf{h}$

- 1 Initialization: 初始化发射波形 $\mathbf{x}_0$ , 初始化接收滤波器 $\mathbf{h}_0$ , 参数 $\lambda$ , 参数 $\mu$ 。迭代终止条件 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
- 2 while error  $\geq \varepsilon_1$  do
- 3 式(13)、式(14)更新 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$
- 4 共轭梯度法在Stiefel流形空间求解 $\mathbf{U}$
- 5 条件式(29)更新 $\mu$
- 6 式(28)更新 $\lambda$
- 7 式(22)更新 $\mathbf{Q}$
- 8 求 $\mathbf{Q}$ 最大特征值 $\gamma$ , 并更新 $\hat{\mathbf{Q}}$
- 9 while error  $\geq \varepsilon_2$  do
- 10 式(26)进行类幂内层迭代
- 11 end while
- 12 式(11)计算接收滤波器 $\mathbf{h}$
- 13 end while
- 14 return  $\mathbf{x}, \mathbf{h}$

---

其中， $\text{SINR}_{\text{update}}$ 和 $\text{SINR}_{\text{before}}$ 分别代表根据本次迭代和上次迭代所设计的发射波形与接收滤波器，所计算得到的回波SINR值。内层迭代误差表达式为

$$\text{error2} = \frac{\|\mathbf{x}_{\text{update}} - \mathbf{x}_{\text{before}}\|}{\|\mathbf{x}_{\text{before}}\|} \quad (31)$$

其中， $\mathbf{x}_{\text{update}}$ 和 $\mathbf{x}_{\text{before}}$ 分别代表本次内层迭代和上次内层迭代所设计发射波形。

对算法1的计算复杂度进行分析，由于所提算法采用迭代求解的方式，其总体计算复杂度是迭代次数的线性函数。假设 $N_r = N_h = N$ ，在每一次迭代中，步骤3、步骤5—步骤8、步骤10的计算复杂度均为 $O(N^3)$ 。步骤4采用共轭梯度下降法，其计算复杂度与样本数量、单个样本计算量以及迭代次数有关。对 $\mathbf{U}$ 的求解式求导数：

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{U}} = 2 \left( \mathbf{U} \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x} - \left( \frac{\|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2} \right) \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x} \right) \cdot (\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{x})^H \quad (32)$$

在共轭梯度下降法的单次迭代中，其计算复杂度为 $O(N^3)$ 。因此，在每次外层迭代计算复杂度为 $O(N^3)$ 。

### 3.2 低PAR约束下发射波形与接收滤波器设计

考虑到发射信号的动态范围受硬件限制，例如功率放大器和A/D转换器最大削波，通常希望发射信号具有低峰均比<sup>[4]</sup>。因此，3.2节将恒模约束放宽到低PAR约束，研究互模糊函数赋形方法。

发射信号的PAR可以定义为

$$\text{PAR}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\max_n |x_n|^2}{\sum_n |x_n|^2 / N} \quad (33)$$

对于低PAR约束下问题的求解过程，前式推导大部分相同。仅PML内层迭代式(25)变为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}^{(s+1)}} & \left\| \mathbf{x}^{(s+1)} - \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x}^{(s)} \right\|_2 \\ \text{s.t.} & |x_n^{s+1}| \leq \rho, n = 1, 2, \dots, N \\ & \left\| \mathbf{x}^{s+1} \right\|_2^2 = N \end{aligned} \quad (34)$$

针对式(34)，可以引入文献[26]中的最近邻向量算法求解。具体算法流程如算法2所示。

## 4 仿真实验与实测数据实验结果分析

实施细节：为了验证所提方法的有效性和先进性，本节从慢时间维波形优化出发，通过数值仿真实验，对所提算法的收敛速度、运行时间和SINR等性能进行评估，并与文献[15]中加权互模糊函数

### 算法2 低PAR约束下最近邻向量问题求解方法

#### Alg. 2 Nearest vector method with low PAR

---

输入：发射波形 $\mathbf{x}^{(s)}$ ，发射波形能量约束 $E$ ，发射波形PAR约束 $\rho$ ，矩阵 $\hat{\mathbf{Q}}$   
输出：发射波形 $\mathbf{x}^{(s+1)}$

- 1 Initialization: 单位化 $\mathbf{x}^{(s)}$ ,  $\xi = \sqrt{E\rho/N}$ ,  $k = 0$
- 2 选取 $\mathbf{x}^{(s)}$ 中模长最小的 $(N - k)$ 个元素的索引构成集合 $\mathcal{M}$ ，若 $\mathcal{M}$ 不唯一， $k = k + 1$ ，重复步骤2
- 3 if  $\forall m \in \mathcal{M}, x_m^{(s)} = 0$  do
- 4 if  $m \in \mathcal{M}$  do
- 5  $x_m^{(s+1)} = \sqrt{(E - k\xi^2) / (N - k)}$
- 6 else do
- 7  $x_m^{(s+1)} = \xi e^{j \arg x_m^{(s)}}$
- 8 return  $\mathbf{x}^{(s+1)}$
- 9 else do
- 10  $\varpi = \sqrt{(E - k\xi^2) / \sum_{m \in \mathcal{M}} |x_m^{(s)}|^2}$
- 11 if  $\forall m \in \mathcal{M}, \varpi x_m^{(s)} > \xi$  do
- 12  $k = k + 1$ ，返回步骤2
- 13 else do
- 14 if  $m \in \mathcal{M}$  do
- 15  $x_m^{(s+1)} = \varpi x_m^{(s)}$
- 16 else do
- 17  $x_m^{(s+1)} = \xi e^{j \arg x_m^{(s)}}$
- 18 end
- 19 end
- 20 end
- 21 return  $\mathbf{x}^{(s+1)}$

---

(Weighted-CAF, We-CAF)、文献[17]中迭代最小化恒模模糊函数赋形(Unimodular AF Shaping via Iterative Minimization, UniAFSIM)，文献[18]中序列迭代优化算法(Iterative Sequential Optimization, ISO)以及文献[23]中的认知接收发射联合设计循环算法(Cognitive Receiver and Waveform cyclic, CREWcyclic)等经典算法进行对比。本节的实验验证采用的初始化发射波形与接收滤波器均为随机序列，并对5种不同的算法采用相同的随机种子，使5种算法的初始发射波形完全相同。在本文所提算法中，内外层误差迭代值设置为 $\varepsilon_1 = 1\text{E} - 4$ ， $\varepsilon_2 = 5\text{E} - 4$ 。仿真中涉及的关于计算时间的分析均在计算机(内核2.30 GHz i7-12700H, RAM 16.0 GB)上进行，MATLAB版本为R2022a。

### 4.1 CM约束下互模糊函数赋形的仿真实验验证

设置目标散射系数 $\alpha_{\text{target}} = 1$ ，噪声能量 $\sigma_n^2 = 1$ 。初始化发射波形为 $\mathbf{x}^{(0)} = \{e^{j\psi^{(0)}(n)}\}_{n=1}^N$ ，接收滤

波器  $\mathbf{h}^{(0)} = \{\psi^{(0)}(n)\}_{n=1}^N$ ，其中  $\{\psi^{(0)}(n)\}_{n=1}^N$  和  $\{\phi^{(0)}(n)\}_{n=1}^N$  是相互独立的随机变量，均匀分布在  $[0, 2\pi]$ 。假设发射波形和接收滤波器的长度  $N = 50$ ，干扰区域  $\sigma(r, h)$  在距离-多普勒单元上的分布如图1所示，表达式为

$$\sigma(r, h) = \begin{cases} 1, & r \in [1, 5], h \in [-3, 0) \cup (0, 3] \\ 1, & r \in [2, 5], h = 0 \\ 1, & r \in [5, 10], h = [-12, -10] \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (35)$$

其中， $\cup$ 表示两个集合的并集。

在实际问题中干扰区域通常可以利用动态环境数据库来预测，例如地理信息系统、气象数据、先前回波以及一些杂波谱模型等<sup>[10]</sup>。如前文问题模型所述，将杂波的多普勒速度归一化到目标多普勒速度。因此对于本文仿真实验，目标多普勒速度为  $v_{\text{target}} = 0$ 。

图2是式(12)中的目标函数随内层迭代次数的变化曲线，可以看出响应值呈阶梯状上升趋势。如算法1所述，内层迭代更新发射波形  $\mathbf{x}$ ，外层迭代更新接收滤波器  $\mathbf{h}$  以及其他相关参数。图2中局部放大图为PML法更新发射波形对目标响应值的影响，即内层迭代；而曲线整体趋势代表更新接收滤波器

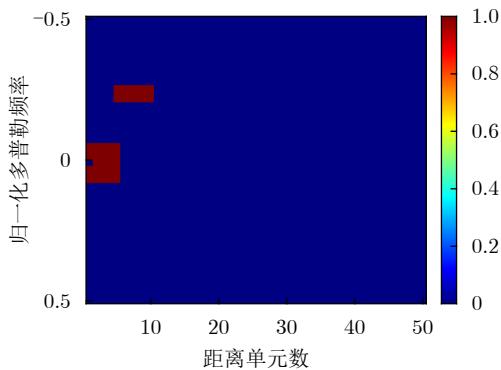


图1 干扰能量分布

Fig. 1 Interference energy distribution

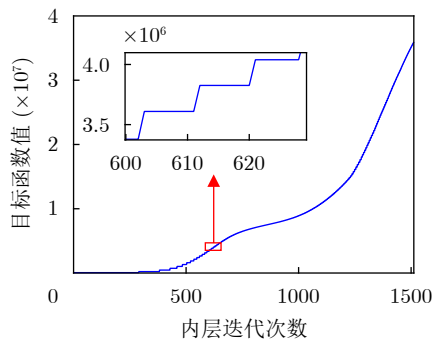


图2 本文算法目标函数响应值收敛曲线

Fig. 2 The convergence curve of objective function response value in the proposed algorithm

对目标响应值的影响，即外层迭代。收敛曲线说明本文所提方法使目标函数响应值单调递增，且最终收敛到平稳。

图3对比了5种算法SINR值随迭代次数的变化趋势，其中外层迭代次数取前200次。本文所提算法、We-CAF, UniAFSIM, ISO算法以及CREW-cyclic算法在经过200次外层迭代后的SINR值分别为14.7 dB, 5.1 dB, 6.0 dB, 10.3 dB和13.3 dB。可以看出，在200次外层迭代后，除了UniAFSIM和ISO算法，其余3种算法均达到收敛。在未达到收敛的两种算法中，ISO算法在200次外层迭代后接近收敛，最终收敛为10.9 dB，而UniAFSIM算法尚未达到收敛，最终收敛值为11.5 dB。在5种算法中，本文所提算法和其余3种对比算法收敛所需外层迭代次数要明显小于UniAFSIM算法的收敛所需外层迭代次数，且所提算法的收敛值要大于其余4种算法。4种算法中UniAFSIM方法收敛所需外层迭代次数较多，这是由于UniAFSIM是发射波形与接收滤波器相匹配的模糊函数设计，而本文所提算法、We-CAF以及ISO算法均改变接收滤波器，令其与发射波形失配，从而提高了波形设计的自由度，也提升了接收信号的SINR性能。

根据图1所示的干扰能量分布图，理想的互模糊函数图应该在干扰能量较大处具有较为明显的凹陷，而在目标所在的距离-多普勒单元具有较大响应值，同时在杂波较低且不存在目标的区域平均分配能量。图4是5种不同算法设计发射波形与接收滤波器的互模糊函数图。互模糊函数的计算方法为

$$\text{CAF}(r, h) = \mathbf{h}^H \mathbf{J}^r (\mathbf{x} \odot \mathbf{p}(v_h)) \quad (36)$$

其中，图4框内是杂波所在的距离-多普勒单元，图4的互模糊函数在杂波所处距离单元内均具有凹口，证明了5种算法的有效性。从图4可以看出，本文所提CM约束下的联合设计与CREWcyclic

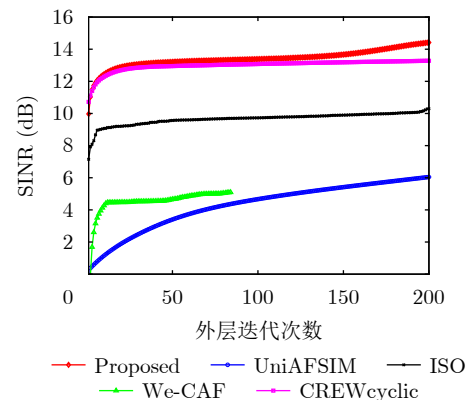


图3 不同方法下SINR值随迭代次数变化

Fig. 3 SINR versus the iteration times of different algorithms

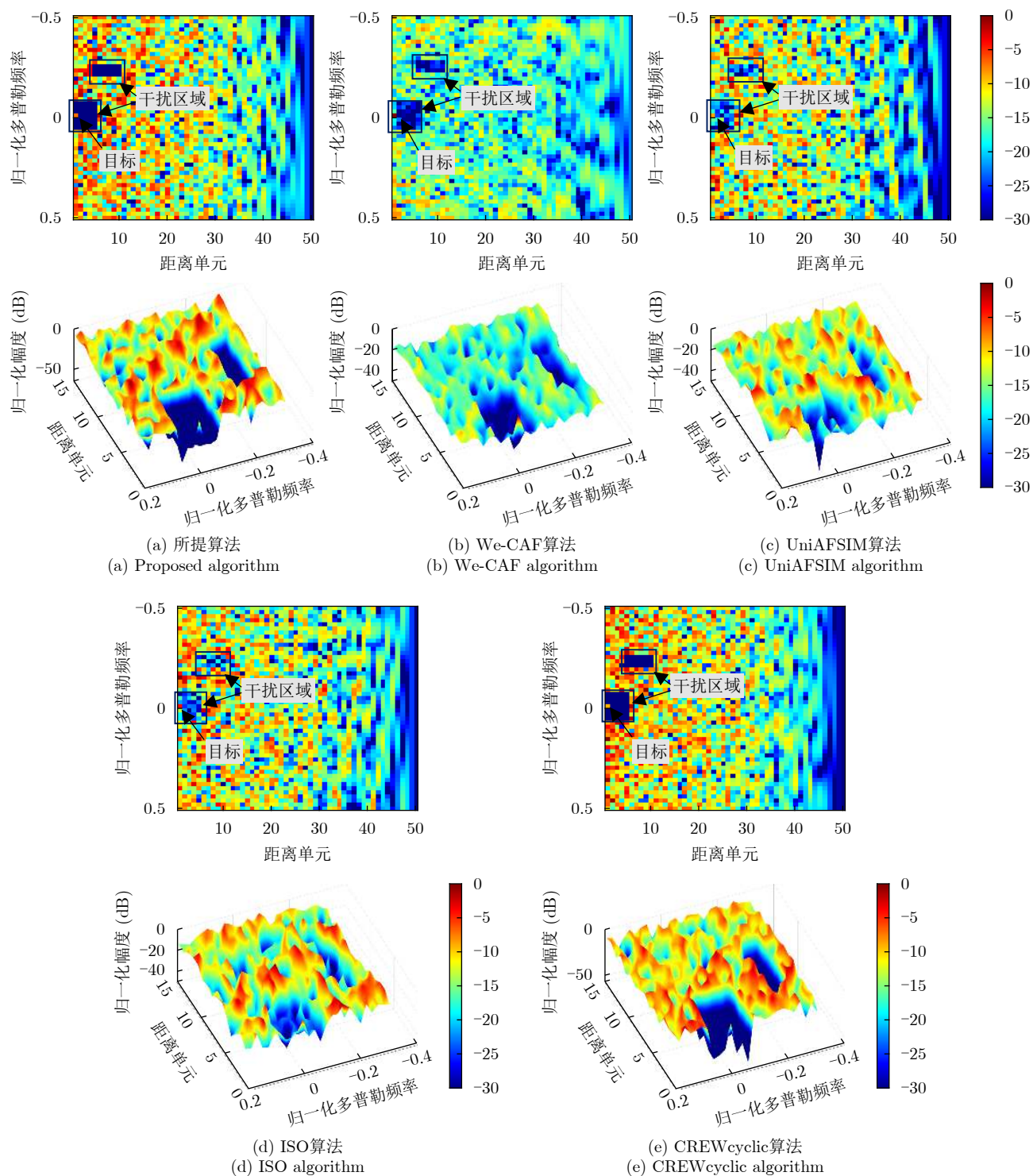


图 4 5种算法生成CAF

Fig. 4 CAF generated by five different algorithms

算法设计发射与接收滤波器具有较好的互模糊函数性能。

图5展示了图4在距离单元为 $r = 1, 2, 3$ 的截面图，其中红色区域为干扰能量分布集中处， $r = 1, h = 0$ 为目标所在距离-多普勒单元。从图5可以看出，归一化多普勒频率在 $[-0.06, 0.06]$ 时，即杂波干扰集中处，5种方法对不同的距离单元均有较为

明显的凹口和尖峰。对于目标附近杂波区域的CAF凹陷深度，We-CAF, UniAFSIM, ISO算法旁瓣大小可以达到约 $-30$  dB，CREWcyclic算法在 $r = 1, 2, 3$ 的距离单元处的凹陷均可达到 $-40$  dB，而本文所提算法凹陷值可达到约 $-50$  dB。因此本文所提算法和CREWcyclic算法相比于其他3种算法在多普勒维度，具有更低的旁瓣。



为了进一步体现所提方法在不同码长下的性能与运行效率, 改变发射波形码长为 $N=30:10:100$ , 并对比5种算法接收回波的SINR值和达到收敛时的运行时长。从表1可以看出, 随着发射波形码长的增加, 5种算法达到收敛的时间均增加。其中所提方法与CREWcyclic方法程序运行时长相近, 且CREWcyclic算法运行效率略优于所提算法。UniAFSIM算法和ISO算法的运算时长明显增大, 在运行效率上要略差于其他3种算法。We-CAF算法达到收敛的速度较快, 这是由于We-CAF算法未对发射波形进行恒模约束。所提算法运行时长略高于

CREWcyclic算法的原因在于, 在优化求解方式上, 两者均利用内外两层迭代交替更新发射波形与接收滤波器, 但在将分式规划转化到二次规划的过程中, CREWcyclic采用Dinkelbach算法, 而本文通过引入新的参数 $\lambda, \mu, U$ , 将约束条件与目标函数进行转化, 把问题分式规划形式变换到二次规划形式。在本文的转化方式中采用了共轭梯度下降法, 这导致运行时长的增加, 因此所提方法较CREWcyclic算法运算效率低。同时, 图6表明本文设计发射波形和接收滤波器下, 回波的SINR性能相较于其余4种方法有明显提升。虽然本文所提算法和

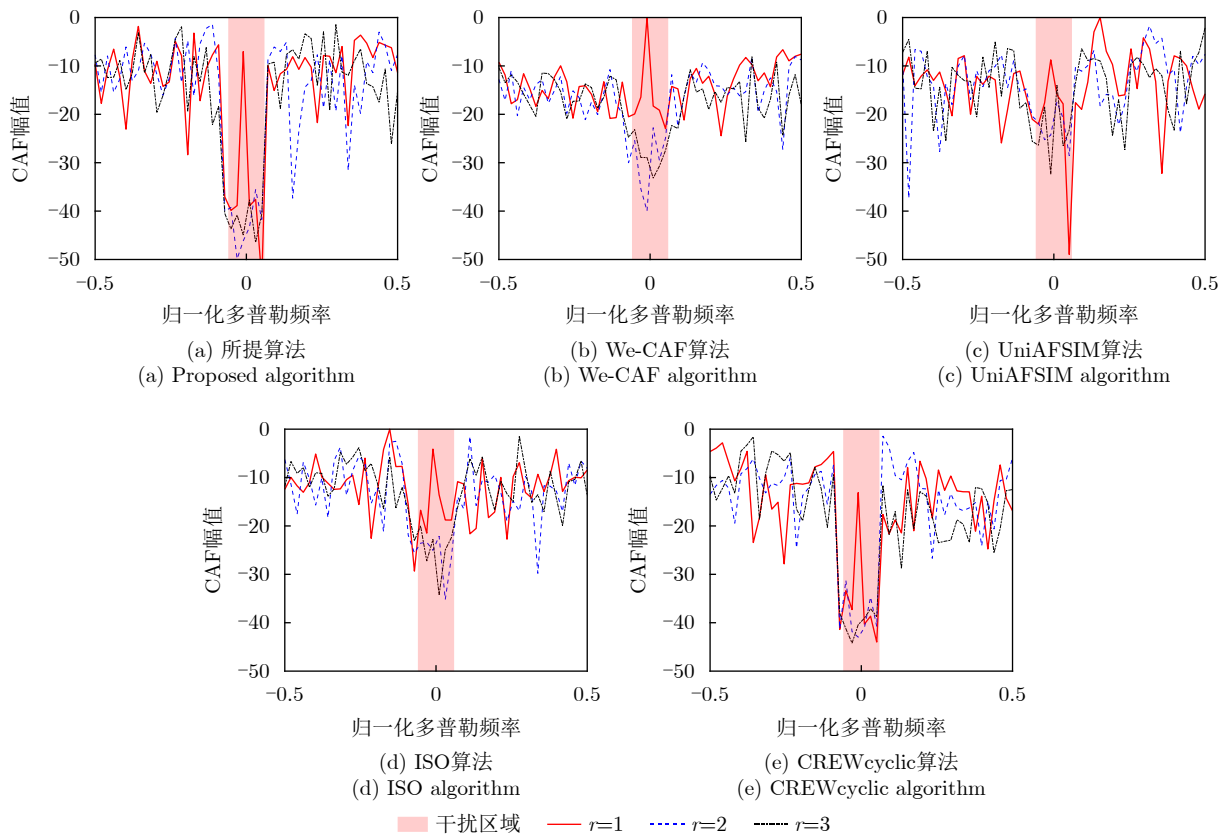


图5 5种算法生成CAF距离单元( $r = 1, 2, 3; N = 50$ )截面图

Fig. 5 Distance cut ( $r = 1, 2, 3$ ) of the CAF generated by five algorithms ( $N = 50$ )

表1 不同码长下5种算法性能统计

Tab. 1 Performance statistics table of five algorithms under different code length

码长 $N$	收敛时SINR (dB)					收敛时运行时间(s)				
	所提方法	We-CAF	UniAFSIM	ISO	CREWcyclic	所提方法	We-CAF	UniAFSIM	ISO	CREWcyclic
30	8.5	1.7	8.3	6.9	8.2	54.0	2.7	39.0	65.5	31.7
40	12.5	4.3	10.5	9.3	11.3	159.8	19.7	155.8	290.3	162.2
50	14.7	5.1	11.5	10.9	13.3	256.9	31.9	365.4	346.9	256.3
60	15.5	6.2	12.1	11.1	14.6	304.1	68.6	346.1	358.0	288.6
70	17.1	7.2	13.6	12.4	15.6	477.4	161.9	426.2	372.2	342.8
80	17.4	7.8	14.6	13.3	16.1	691.0	238.6	687.8	664.4	506.9
90	18.2	8.7	15.7	14.4	16.7	745.8	373.0	721.5	807.1	622.5
100	18.6	9.6	16.0	15.7	17.4	820.9	477.9	1113.8	1066.4	822.5

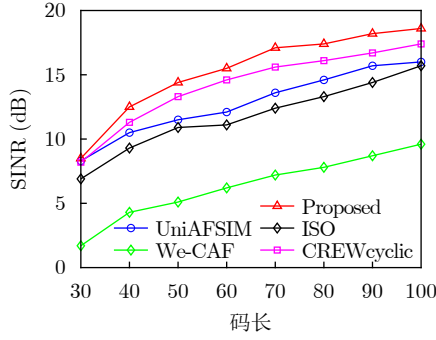


图6 5种算法SINR值随发射波形码长变化曲线

Fig. 6 SINR of five different algorithms versus code length

CREWcyclic均在杂波所在的距离-多普勒单元具有较低的凹口，但CREWcyclic算法生成的发射波形与接收滤波器在对回波进行处理后，SINR值低于本文算法。其原因可由图5(e)看出，CREWcyclic算法对应发射波形-接收滤波器对目标所在零多普勒点的非匹配滤波响应值不高，即峰值SINR值损失较大。另外，本文所提方法和CREWcyclic算法由于目标函数为接收SINR最大化，因此忽略了非匹配接收带来的峰值SINR损失，这也可作为未来工作的发展方向。

#### 4.2 低PAR约束下互模糊函数赋形的实验验证

当把CM约束放宽到低PAR约束时，利用最近邻向量法所设计的发射波形的实部与虚部如图7所示。当PAR = 1时，本文产生的发射波形所对应的点位于单位圆上，证明产生的发射波形满足CM约束。当PAR = 2时，点的分布半径较PAR = 1相对分散，但也满足PAR约束。这说明PAR值越大，波形幅度起伏越大，越不利于实际应用。值得说明的是，由于h仅在接收机中使用，无需满足峰均比的硬件约束，本文并未对其模长做任何约束，这与文献[15]的思路是一致的。

对发射序列选取不同的PAR值作为约束条件，图8展示了恒模约束、PAR = 2, PAR = 4条件下，SINR性能随外层迭代次数的变化曲线。在1000次外层迭代下，3种约束下所能达到的SINR值分别为14.7 dB, 15.5 dB以及16.0 dB。可以看出随着PAR约束的逐渐放宽，发射波形与接收滤波器具有更好的SINR性能。这是由于随着PAR值变大，发射波形的可行解域也变大，所以最终收敛值也会相应变大。

#### 4.3 互模糊函数赋形的超参数分析

本小节将对模型求解中给出的 $\mu, \kappa, \lambda$ 这三种参数取值规律提出数值仿真实验证明。由上文分析，为了增大收敛速度，可使三者均随着外层迭代变化直至收敛。在实验中，设置

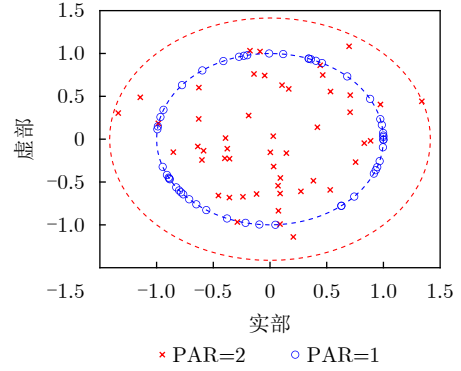


图7 不同PAR约束下发射波形实部虚部

Fig. 7 The real and imaginary parts of transmitting waveform under different PAR constraints

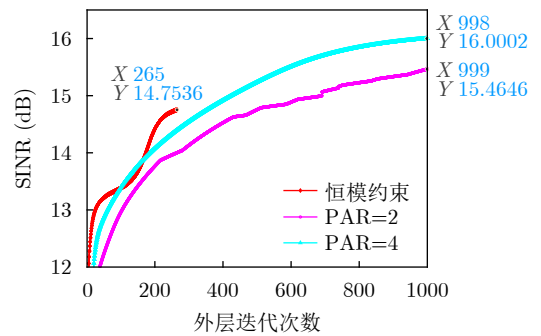


图8 不同PAR约束下SINR值随运行时间变化

Fig. 8 SINR versus the iteration time under different PAR constraints

$$\mu = k(\mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x})^{-1} \quad (37)$$

其中， $k$ 为可变参数。

令 $k = 1/5, 2, 5, 10$ 分别在码长 $N = 50$ 条件下实验，外层迭代次数控制在300次，结果如图9所示。可以看出，在外层迭代次数达到300次时，仅 $k = 2$ 时算法达到收敛。实验证明，当 $k > 1$ 时，随着 $k$ 取值的增大，算法收敛速度逐渐变慢；当 $k < 1$ 时，即不满足式(29)所示条件时，算法不收敛。因此，在应用本文所提算法时，需综合考虑算法收敛性能和运行速度，选择合适的 $k$ 参数。本文实验均在 $k = 2$ 条件下进行。

#### 4.4 CM约束下互模糊函数赋形的实测数据验证

上文的仿真实验仅对杂波分布进行简单的块状假设，为了分析实际场景中杂波在RD图上的分布形状，本节将利用实测数据作为杂波先验信息，测试本文算法在更为复杂场景下的性能。本节采用海南地区近岸海杂波前下视挂飞实测数据作为实验场景，对本文算法进行分析。采集实测数据时，相关雷达参数如表2所示。取回波的前64个脉冲数据做距离-多普勒图分析，并在距离维截取前64个距离

单元,结果如图10所示。红色区域即为杂波干扰集中区域,其所在归一化多普勒频率区间为 $[-0.15, 0.20]$ 。

利用算法1对图10所示干扰区域进行恒模发射波形-接收滤波器设计。所得SINR随迭代次数变化趋势如图11(a)所示,算法对于实测数据满足单调收敛趋势,并且收敛值可达17.1 dB。本文算法所设计的发射波形与接收滤波器的幅度和相位信息如图11(c)、图11(d)所示,虽然所提方法并未对接收滤波器进行幅度约束,但结果表明其幅度差别不

表 2 实测数据实验下的雷达参数

Tab. 2 Radar parameters in real measured data experiment

参数	数值
采样率	1 GHz
带宽	400 MHz
脉冲重复频率	2000 Hz
脉冲宽度	10 $\mu$ s
高度	1.5 km
俯仰角	30°
方位角	0°
波束宽度	5°

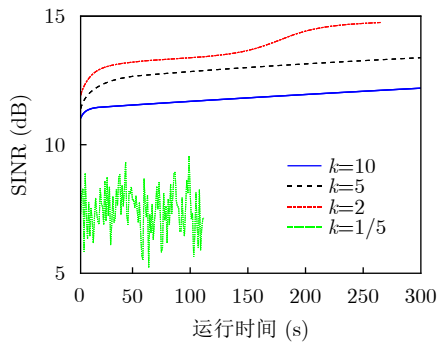


图 9 不同 $k$ 取值下信噪比随运行时间变化曲线  
Fig. 9 SINR with respect to running time under different values of  $k$

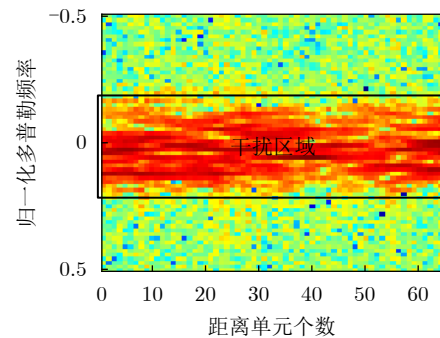
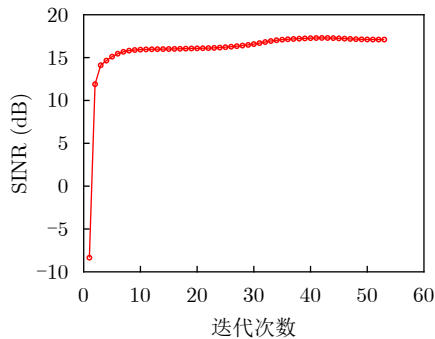
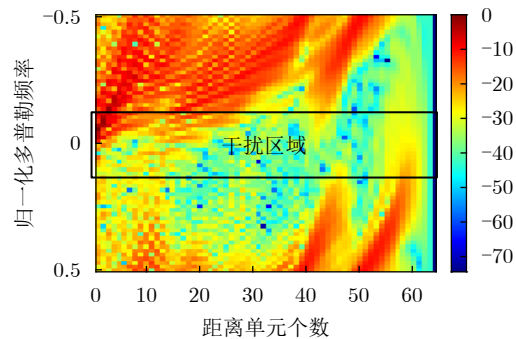


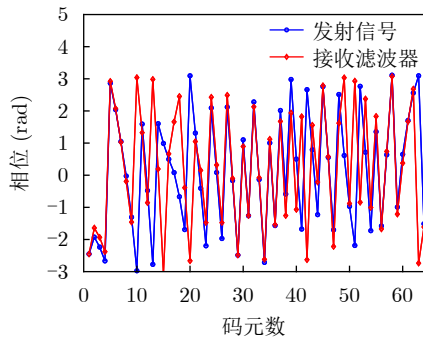
图 10 海南地区某机场实测数据距离-多普勒图  
Fig. 10 Range-Doppler diagram of real measured data from an airport in Hainan



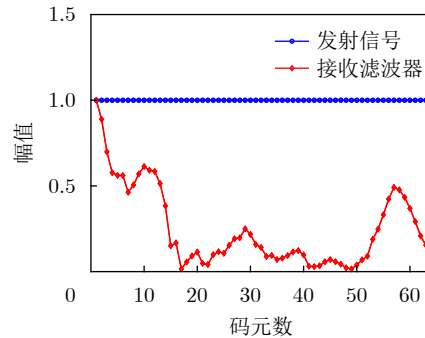
(a) SINR值随迭代次数变化  
(a) SINR versus the iteration time



(b) 发射信号与接收滤波器生成CAF  
(b) CAF generated by transmitting signal and receiving filter



(c) 发射信号与接收滤波器相位  
(c) Phase of transmitting signal and receiving filter



(d) 发射信号与接收滤波器幅度  
(d) Amplitude of transmitting signal and receiving filter

图 11 实测数据运用算法1运行结果

Fig. 11 Results of applying Alg. 1 to the real measured data

大, 具备实际应用可能。生成的CAF如图11(b)所示, 其形状在对应的杂波分布较为集中的距离-多普勒区域具有凹陷, 这证明了所提算法在更复杂场景下的有效性。

## 5 结语

针对经典CAF赋形方法中, 波形对微弱运动目标的检测能力不高, 且运算效率较低的问题, 本文分别以CM和低PAR为约束条件, 提出了一种基于最大化SINR优化准则的发射波形与接收滤波器互模糊函数赋形方法。为了解决所建模的恒模二次分式非凸优化问题, 先将其转化为恒模二次规划问题, 并利用交替迭代与PML方法求得最优解。仿真与实测杂波数据下的实验证明, 相比于现有方法, 本文具有更高的SINR和短码长下较高运算效率, 同时可以实现任意PAR约束下的联合设计。另外, 本文还验证了算法中超参数取值对收敛性能与迭代速度的影响, 以期对算法实际应用中的参数选择提供理论依据与经验参考。基于本文研究, 未来的工作可集中于以下两部分, 一是在问题模型中考虑增加峰值SINR损失约束, 以解决强噪声背景下的目标检测问题; 二是完善外场实验方案, 通过发射波形设计和相应的接收回波处理, 在实际复杂场景下验证所提算法的有效性。

**利益冲突** 所有作者均声明不存在利益冲突

**Conflict of Interests** The authors declare that there is no conflict of interests

## 参考文献

- [1] STOICA P, HE Hao, and LI Jian. Optimization of the receive filter and transmit sequence for active sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(4): 1730–1740. doi: [10.1109/TSP.2011.2179652](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2179652).
- [2] STOICA P, LI Jian, and XUE Ming. Transmit codes and receive filters for radar[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(6): 94–109. doi: [10.1109/MSP.2008.929231](https://doi.org/10.1109/MSP.2008.929231).
- [3] 余若峰, 杨威, 付耀文, 等. 面向不同雷达任务的认知波形优化综述[J]. *电子学报*, 2022, 50(3): 726–752. doi: [10.12263/DZXB.20211068](https://doi.org/10.12263/DZXB.20211068).  
YU Ruofeng, YANG Wei, FU Yaowen, *et al.* A review on cognitive waveform optimization for different radar missions[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2022, 50(3): 726–752. doi: [10.12263/DZXB.20211068](https://doi.org/10.12263/DZXB.20211068).
- [4] LEVANON N and MOZESON E. Radar Signals[M]. New York: John Wiley & Sons, 2004: 7–9.
- [5] CUI Guolong, FU Yue, YU Xianxiang, *et al.* Local ambiguity function shaping via uni-modular sequence design[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(7): 977–981. doi: [10.1109/lsp.2017.2700396](https://doi.org/10.1109/lsp.2017.2700396).
- [6] HAYKIN S. Cognitive radar: A way of the future[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2006, 23(1): 30–40. doi: [10.1109/msp.2006.1593335](https://doi.org/10.1109/msp.2006.1593335).
- [7] ARLERY F, KASSAB R, TAN U, *et al.* Efficient gradient method for locally optimizing the periodic/aperiodic ambiguity function[C]. *IEEE Radar Conference (RadarConf)*, Philadelphia, USA, 2016: 1–6 doi: [10.1109/RADAR.2016.7485309](https://doi.org/10.1109/RADAR.2016.7485309).
- [8] ARLERY F, KASSAB R, TAN U, *et al.* Efficient optimization of the ambiguity functions of multi-static radar waveforms[C]. *17th International Radar Symposium (IRS)*, Krakow, Poland, 2016: 1–6. doi: [10.1109/irs.2016.7738627](https://doi.org/10.1109/irs.2016.7738627).
- [9] WANG Fulai, FENG Sijia, YIN Jiapeng, *et al.* Unimodular sequence and receiving filter design for local ambiguity function shaping[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 5113012. doi: [10.1109/tgrs.2022.3171253](https://doi.org/10.1109/tgrs.2022.3171253).
- [10] AUBRY A, DE MAIO A, JIANG Bo, *et al.* Ambiguity function shaping for cognitive radar via complex quartic optimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(22): 5603–5619. doi: [10.1109/TSP.2013.2273885](https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2273885).
- [11] QIU Xiangfeng, JIANG Weidong, ZHANG Xinyu, *et al.* Quartic riemannian trust region algorithm for cognitive radar ambiguity function shaping[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2022, 19: 4022005. doi: [10.1109/LGRS.2022.3151679](https://doi.org/10.1109/LGRS.2022.3151679).
- [12] WU Linlong, BABU P, and PALOMAR D P. Cognitive radar-based sequence design via sinr maximization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(3): 779–793. doi: [10.1109/tsp.2016.2621723](https://doi.org/10.1109/tsp.2016.2621723).
- [13] HE Hao, STOICA P, and LI Jian. On synthesizing cross ambiguity functions[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Prague, Czech Republic, 2011: 3536–3539 doi: [10.1109/icassp.2011.5946241](https://doi.org/10.1109/icassp.2011.5946241).
- [14] CHEN Zihao, LIANG Junli, WANG Tao, *et al.* Generalized MBI algorithm for designing sequence set and mismatched filter bank with ambiguity function constraints[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 2918–2933. doi: [10.1109/TSP.2022.3181346](https://doi.org/10.1109/TSP.2022.3181346).
- [15] HE Hao, LI Jian, and STOICA P. Waveform Design for Active Sensing Systems: A Computational Approach[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2012: 106–121. doi: [10.1017/CBO9781139095174](https://doi.org/10.1017/CBO9781139095174).
- [16] SOLTANALIAN M, TANG Bo, LI Jian, *et al.* Joint design of the receive filter and transmit sequence for active sensing[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2013, 20(5):

- 423–426. doi: [10.1109/lsp.2013.2250279](https://doi.org/10.1109/lsp.2013.2250279).
- [17] ESMAEILI-NAJAFABADI H, LEUNG H, and MOO P W. Unimodular waveform design with desired ambiguity function for cognitive radar[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(3): 2489–2496. doi: [10.1109/taes.2019.2942411](https://doi.org/10.1109/taes.2019.2942411).
- [18] 付月, 崔国龙, 余显祥. 信号相关杂波背景下稳健的恒模序列与接收滤波器设计方法[J]. *雷达学报*, 2017, 6(3): 292–299. doi: [10.12000/JR16158](https://doi.org/10.12000/JR16158).  
FU Yue, CUI Guolong, and YU Xianxiang. Robust design of constant modulus sequence and receiver filter in the presence of signal-dependent clutter[J]. *Journal of Radars*, 2017, 6(3): 292–299. doi: [10.12000/JR16158](https://doi.org/10.12000/JR16158).
- [19] LIU Tianjun, FAN Pingzhi, ZHOU Zhengchun, *et al.* Unimodular sequence design with good local auto- and cross-ambiguity function for MSPSR system[C], IEEE 89th Vehicular Technology Conference (VTC2019-Spring), Kuala Lumpur, Malaysia, 2019: 1–5. doi: [10.1109/vtcspring.2019.8746293](https://doi.org/10.1109/vtcspring.2019.8746293).
- [20] WU Linlong, BABU P, and PALOMAR D P. Transmit waveform/receive filter design for MIMO radar with multiple waveform constraints[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(6): 1526–1540. doi: [10.1109/tsp.2017.2787115](https://doi.org/10.1109/tsp.2017.2787115).
- [21] 邱祥风, 姜卫东, 张新禹, 等. 认知MIMO雷达发射波形与接收滤波器联合优化设计方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2023, 45(2): 386–393. doi: [10.12305/j.issn.1001-506X.2023.02.08](https://doi.org/10.12305/j.issn.1001-506X.2023.02.08).
- QIU Xiangfeng, JIANG Weidong, ZHANG Xinyu, *et al.* Joint optimization design method for cognitive MIMO radar transmit waveform and receive filter[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2023, 45(2): 386–393. doi: [10.12305/j.issn.1001-506X.2023.02.08](https://doi.org/10.12305/j.issn.1001-506X.2023.02.08).
- [22] AUBRY A, DEMAIO A, FARINA A, *et al.* Knowledge-aided (potentially cognitive) transmit signal and receive filter design in signal-dependent clutter[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(1): 93–117. doi: [10.1109/TAES.2013.6404093](https://doi.org/10.1109/TAES.2013.6404093).
- [23] SOLTANALIAN M and STOICA P. Designing unimodular codes via quadratic optimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(5): 1221–1234. doi: [10.1109/tsp.2013.2296883](https://doi.org/10.1109/tsp.2013.2296883).
- [24] GHARANJIK A, SOLTANALIAN M, SHANKAR M R B, *et al.* Grab-n-Pull: A max-min fractional quadratic programming framework with applications in signal and information processing[J]. *Signal Processing*, 2019, 160: 1–12. doi: [10.1016/j.sigpro.2019.02.006](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.02.006).
- [25] TROPP J A, DHILLON I S, HEATH R W, *et al.* Designing structured tight frames via an alternating projection method[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(1): 188–209. doi: [10.1109/tit.2004.839492](https://doi.org/10.1109/tit.2004.839492).
- [26] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2013: 447–450.  
ZHANG Xianda. *Matrix Analysis and Applications*[M]. 2nd ed, Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 447–450.

### 作者简介

杨晨, 硕士生, 主要研究方向为认知雷达波形设计。

吴蕾, 硕士生, 主要研究方向为雷达信号处理。

杨威, 博士, 副教授, 主要研究方向为认知雷达目标探测与识别。

姜卫东, 博士, 研究员, 主要研究方向为雷达系统、雷达信号处理、雷达目标识别。

刘永祥, 博士, 教授, 主要研究方向为雷达目标识别、雷达目标微动特性。

(责任编辑: 高山流水)