基于交替方向惩罚法的低精度量化MIMO雷达恒模波形设计方法

万 环[①] 余显祥[②] 全 智[①] 廖 斌*[①]

[①](深圳大学电子与信息工程学院 深圳 518060)

[②](电子科技大学信息与通信工程学院 成都 611731)

摘要：在MIMO雷达中配备大量有源天线单元可以获得优异的波束形成性能，但会导致系统能耗大、电路复杂及成本高等问题。采用低精度的DAC组件可有效克服上述问题，但现有基于无限精度DAC条件所设计的MIMO雷达波形往往难以直接适用于低精度DAC系统。为此，该文提出了一种离散相位约束下基于最小化积分副主瓣比的低精度量化MIMO雷达恒模波形设计方法。该方法首先采用丁克尔巴赫(Dinkelbach)算法将目标函数二次分数形式转换成减法形式，再利用交替方向惩罚法求解非凸恒模离散相位约束问题。最后通过数值仿真与其他方法进行对比，分析了所提方法的发射方向图与积分副主瓣比性能，验证了该方法的有效性。

关键词：低精度量化；恒模；离散相位；发射波形；交替方向惩罚法

中图分类号：TN958 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-283X(2022)04-0557-13

DOI: 10.12000/JR22072

引用格式：万环, 余显祥, 全智, 等. 基于交替方向惩罚法的低精度量化MIMO雷达恒模波形设计方法[J]. 雷达学报, 2022, 11(4): 557–569. doi: 10.12000/JR22072.

Reference format: WAN Huan, YU Xianxiang, QUAN Zhi, *et al*. Constant modulus waveform design for low-resolution quantization MIMO radar based on an alternating direction penalty method[J]. *Journal of Radars*, 2022, 11(4): 557–569. doi: 10.12000/JR22072.

Constant Modulus Waveform Design for Low-resolution Quantization MIMO Radar Based on an Alternating Direction Penalty Method

WAN Huan[①] YU Xianxiang[②] QUAN Zhi[①] LIAO Bin*[①]

[①](*School of Electronics and Information Engineering, University of Shenzhen, Shenzhen* 518060, *China*)

[②](*School of Information and Communication Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu* 611731, *China*)

Abstract: Outstanding beamforming performance of the Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) radar can be achieved by deploying a large number of active antenna elements. Nonetheless, this will significantly increase power consumption, circuit complexity and hardware cost. These problems can be overcome by utilizing low-resolution Digital-to-Analog Converter (DAC) components. However, MIMO radar waveforms designed under the condition of infinite-resolution DACs are usually inapplicable to systems with low-resolution DACs. Therefore, under the constraints of discrete phases, this paper proposes a MIMO radar constant modulus waveform design method based on Integrated Sidelobe-to-Mainlobe Ratio (ISMR) minimization. The Dinkelbach algorithm is first used to convert the objective function with quadratic fractional form into a subtraction form. Then, the alternating direction penalty method is employed to solve the nonconvex constant modulus discrete phase constraint problem. Finally, by comparison with other methods through numerical

收稿日期：2022-04-24；改回日期：2022-08-15；网络出版：2022-08-24

*通信作者： 廖斌 binliao@szu.edu.cn *Corresponding Author: LIAO Bin, binliao@szu.edu.cn

基金项目：国家自然科学基金(62171292)，广东省自然科学基金(2020A1515010410, 2022A1515010188)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (62171292), Guangdong Basic and Applied Basic Research Foundation (2020A1515010410, 2022A1515010188)

责任主编：梁军利 Corresponding Editor: LIANG Junli

simulations, the behavior of the transmit beampattern and the performance of ISMR are analyzed, and the effectiveness of the method is verified.

Key words: Low-resolution quantization; Constant modulus; Discrete phase; Transmit waveform; Alternate Direction Penalty Method (ADPM)

1 引言

多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)雷达采用多信号同时发射与接收模式[1–3]，可按需调整发射波形，实现高增益窄波束或全区域覆盖的宽波束。相比传统相控阵雷达，MIMO雷达基于波形分集，可为系统发射与接收端提供更多的自由度，提高波达角(Directions of Arrival, DOA)估计精度、目标检测能力、干扰抑制能力[4–6]。MIMO雷达波形设计的一个主要目的是使发射能量集中在目标空间区域(主瓣)范围内，同时降低非目标区域(副瓣)能量辐射，实现波束能量的最佳匹配发射，从而提高雷达目标探测、参数估计和检测性能[7–9]。为了提升性能，MIMO雷达系统通常会配置大量有源天线单元，但采用高精度(超过10位)数模转换器(Digital-to-Analog Converters, DAC)组件会大幅增加系统电路的复杂度、能耗及成本。相反地，低精度DAC组件可以显著降低系统功耗与成本[10–12]，已广泛应用于各种场景，例如低功耗超宽带通信系统、大规模或超大规模MIMO系统[13,14]等。

现有的MIMO雷达波形设计方法主要面向采用高精度DAC组件的系统[15–20]，针对采用低精度DAC组件的MIMO雷达波形设计方法相对较少[21–26]。若直接对现有的基于无限精度DAC算法所设计的波形进行量化来适配低精度DAC组件，系统性能将会严重下降。低精度量化波形设计的核心难点在于离散相位或离散幅度的非凸约束求解。最直接的方法是采用穷搜法，但随着信号维度和快拍数的增加，计算复杂度与时间也呈指数量级增加。为了克服计算效率问题，目前主要有两类解决方法，第1类为改进式穷搜法，通过改变搜索策略与范围来减少搜索次数从而降低计算复杂度与运算时间。例如，文献[21]提出了基于块坐标下降(Block Coordinate Descent, BCD)搜索法，使搜索次数从指数级$L^{N_\mathrm{t}N}$(L为低精度离散相位或幅度的个数，N_t为发射阵列天线数，N为快拍数)降低至$TLN_\mathrm{t}N$(T为该算法收敛时最大迭代次数)。基于此思路，文献[22]提出了两种广义似然上升搜索算法，第$t+1$次迭代结果可通过似然判断从第t次迭代结果翻转符号得到，进一步降低BCD算法的收敛迭代次数，但该方案仅对极低精度(1比特)波形有较好的求解效果。第2类将离散约束近似为连续函数进行求解，再将无限量化精度解重新量化或映射为低精度。文献[23]采用最小化积分副主瓣比(Integrated Sidelobe-to-Mainlobe Ratio, ISMR)准则，结合特殊的矩阵块结构，利用半正定松弛(Semidefinite Relaxation, SDR)技术，获得高精度发射信号，再通过量化器得到1比特信号。文献[24]采用连续可微函数来逼近1比特信号，并利用交替方向乘子法(Alternation Direction Method of Multipliers, ADMM)求得高精度解，再映射为1比特信号。基于文献[24]，文献[25,26]利用辅助变量与发射信号向量相互约束关系，将1比特信号的离散约束转换成区间连续约束，再通过ADMM算法使得信号不断逼近1比特后再映射为1比特，从而提高信号对1比特DAC的适配能力。

文献[23–26]考虑的是极低精度1比特波形，波形序列元素的实部与虚部的取值均为$\pm\sqrt{E/2N_\mathrm{t}N}$($E$为发射波形总功率)，对应在极坐标轴上体现为有限个相位点(离散相位)，即$\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$。现有的低精度量化波形设计方法主要针对1比特，面向低精度多比特(2~5比特)的波形设计方法相对匮乏。另外，在雷达应用中，为了最大化发射机效率，防止发射机功放非线性失真，通常要求发射波形具有恒模特性，即每个码元的模值是恒定的[27–30]。因此，本文研究基于ISMR最小化准则的低精度(包括极低精度1比特)有限相位恒模波形设计方法。所建模的波形优化问题包含二次分式目标函数和非凸离散约束，难以求解。为此，本文提出了一种基于丁克尔巴赫交替方向惩罚法(Dinkelbach Alternating Direction Penalty Method, DADPM)的优化求解方法。该方法首先利用Dinkelbach算法[31]将目标函数二次分数形式转换成减法形式，再通过ADPM框架求解非凸离散相位约束问题，实现了低精度量化恒模发射波形设计问题的高效求解。

2 低精度量化恒模波形优化问题建模

如图1所示，考虑一个共置窄带MIMO雷达，包含N_t个发射天线，按照半波长间距均匀排布。每个通道配置两个B比特DAC组件，分别对基带信号$s_m(n)$，$m=1,2,\cdots,N_\mathrm{t}$, $n=1,2,\cdots,N$的实部与虚部进行量化，第m个天线n时刻的发射形式表示为$s_{B,m}(n)=Q_B(s_m(n))$，其中$Q_B(\cdot)$表示B比特量化

器。第n个快拍的发射波形表示为$\tilde{\boldsymbol{s}}_{B,n}=[s_{B,1}(n), s_{B,2}(n),\cdots,s_{B,N_{\rm t}}(n)]^{\rm T}$。为方便设计与分析，将$N$个采样快拍下的发射波形序列堆叠为一个向量，即$\boldsymbol{s}_B=[\tilde{\boldsymbol{s}}_{B,1}^{\rm T},\tilde{\boldsymbol{s}}_{B,2}^{\rm T},\cdots,\tilde{\boldsymbol{s}}_{B,N}^{\rm T}]^{\rm T}$。则$B$比特恒模发射波形序列第$i$个元素可以表示为

$$s_B(i)=q{\rm e}^{{\rm j}\varphi_i},\quad i=1,2,\cdots,N_{\rm t}N \tag{1}$$

式中，$q=\sqrt{E/(N_{\rm t}N)}$为发射波形元素的模值，其中E为发射波形总功率，φ_i表示$\boldsymbol{s}$中第i个元素的相位。

B比特恒模波形元素的相位个数共有$L=2^{B+1}$个，相位集合$\mathcal{X}_B$表示为

$$\mathcal{X}_B\triangleq\left\{\frac{\pi}{L}+\frac{2\pi}{L}l\,\middle|\,l=0,1,\cdots,L-1\right\} \tag{2}$$

即B比特恒模发射波形有L个相位均匀分布在以半径为q的极坐标圆周上。图2展示了1比特与2比特波形元素可行域。

基于上述系统模型，在远场方向θ处，N个采样快拍下的信号可表示为[16]

$$\boldsymbol{x}_{\rm t}(\theta)=(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{a}_{\rm t}^{\rm T}(\theta))\boldsymbol{s}_B \tag{3}$$

式中，$\otimes$代表Kroneker积，$(\cdot)^{\rm T}$代表转置。$\boldsymbol{a}_{\rm t}(\theta)$为$N_{\rm t}$维发射阵列导向矢量，表示为

$$\boldsymbol{a}_{\rm t}(\theta)=\left[1,{\rm e}^{-{\rm j}2\pi d\sin\theta/\lambda},\cdots,{\rm e}^{-{\rm j}2\pi d(N_{\rm t}-1)\sin\theta/\lambda}\right]^{\rm T} \tag{4}$$

其中，λ为波长，d为天线阵元间距，且$d=\lambda/2$。根据式(3)，雷达远场空间功率谱可表示为[7]

$$\begin{aligned}P_{\rm t}(\theta)=&\boldsymbol{x}_{\rm t}^{\rm H}(\theta)\boldsymbol{x}_{\rm t}(\theta)=\boldsymbol{s}_B^{\rm H}(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{a}_{\rm t}^{*}(\theta)\boldsymbol{a}_{\rm t}^{\rm T}(\theta))\boldsymbol{s}_B\\=&\boldsymbol{s}_B^{\rm H}\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{s}_B\end{aligned} \tag{5}$$

式中，$(\cdot)^{\rm H}$代表共轭转置，$(\cdot)^{*}$代表共轭，矩阵$\boldsymbol{R}(\theta)$为

$$\boldsymbol{R}(\theta)=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{a}_{\rm t}^{*}(\theta)\boldsymbol{a}_{\rm t}^{\rm T}(\theta) \tag{6}$$

当MIMO雷达发射相干波形，式(5)表示相控阵方向图。如果发射相互正交的波形，表明各个方向辐射的功率相等，实现了空域均匀覆盖。若发射相关波形，发射波束方向图取决于波形具体形式。

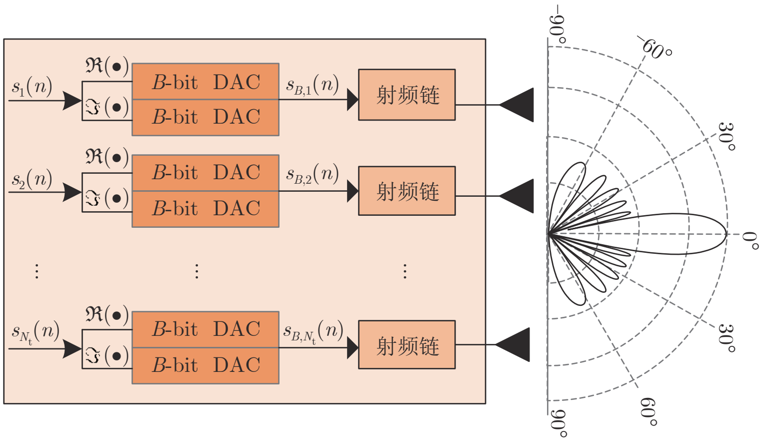
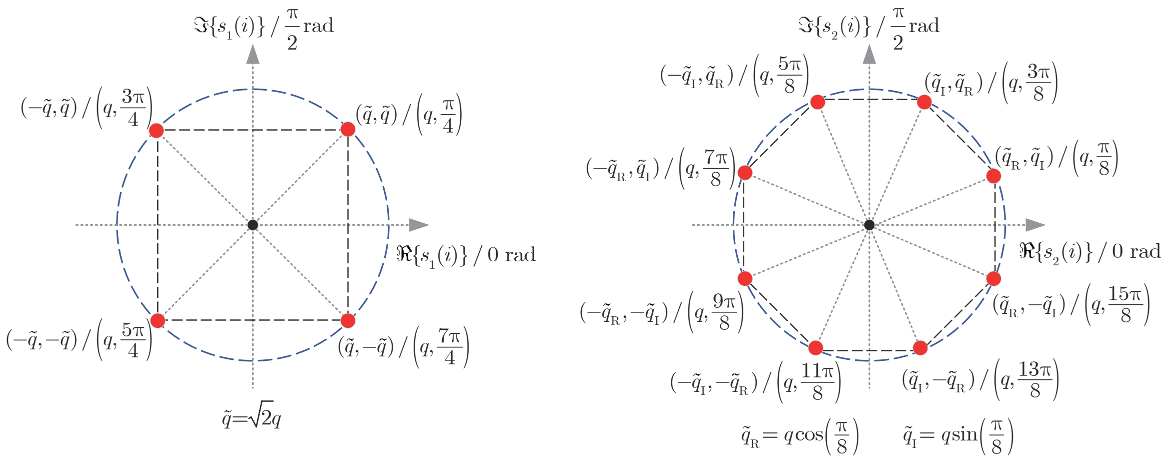


图 1 配置低精度DAC组件的MIMO雷达发射端系统结构图

Fig. 1 System structure diagram of MIMO radar transmitter with low-resolution DACs



(a) 1比特波形元素可行域，L=4

(a) Feasible areas of 1-bit waveform entries, L=4

(b) 2比特波形元素可行域，L=8

(b) Feasible areas of 1-bit waveform entries, L=8

图 2 1比特与2比特波形元素可行域(红点)

Fig. 2 Feasible areas of 1 bit and 2 bit waveform entries (red dots)

定义主瓣区域表示为$\Theta_{\rm m}$，副瓣区域为$\Theta_{\rm s}$，则B比特发射信号的ISMR表示为[16,20]

$$\mathrm{ISMR}(\boldsymbol{s}_B)=\frac{\displaystyle\int_{\Theta_{\rm s}}\boldsymbol{s}_B^{\rm H}\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{s}_B{\rm d}\theta}{\displaystyle\int_{\Theta_{\rm m}}\boldsymbol{s}_B^{\rm H}\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{s}_B{\rm d}\theta}=\frac{\boldsymbol{s}_B^{\rm H}\boldsymbol{\Omega}_{\rm s}\boldsymbol{s}_B}{\boldsymbol{s}_B^{\rm H}\boldsymbol{\Omega}_{\rm m}\boldsymbol{s}_B} \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{\Omega}_{\rm s}=\displaystyle\int_{\Theta_{\rm s}}\boldsymbol{R}(\theta){\rm d}\theta$, $\boldsymbol{\Omega}_{\rm m}=\displaystyle\int_{\Theta_{\rm m}}\boldsymbol{R}(\theta){\rm d}\theta$。

本文采用ISMR最小化准则来设计B比特恒模发射信号，因此该优化问题模型描述为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{s}_B}\ \mathrm{ISMR}(\boldsymbol{s}_B)\\&\text{s.t. angle}\left(\boldsymbol{s}_B(i)\right)\in\mathcal{X}_B,\\&\qquad|s_B(i)|=q,\ i=1,2,\cdots,N_{\rm t}N\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)中，angle(·)表示输入变量的相位。上述问题的目标函数为二次分式，约束条件包含非凸离散相位约束，该问题为非确定性多项式-难(Nondeterministic Polynomial-hard, NP-hard)，难以求解。

3 问题求解

本节将提出一种基于ADPM的优化算法对问题(8)进行求解。该方法首先通过Dinkelbach算法将目标函数二次分数形式转换成减法形式，再基于ADPM框架，引入辅助变量，将离散相位约束转换为$N_{\rm t}N$个独立并行的三角函数问题，通过迭代逐步逼近最优解。

3.1 基于Dinkelbach算法的等价转化

基于Dinkelbach算法原理，可以将目标函数二次分数形式转换成减法形式，即

$$f(\boldsymbol{s}_B,\xi)=\boldsymbol{s}_B^{\rm H}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{s}_B \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{\Xi}$表示为

$$\boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{\Omega}_{\rm s}-\xi\boldsymbol{\Omega}_{\rm m} \tag{10}$$

式中，参数$\xi\geq0$，在Dinkelbach方法中通过式(11)不断更新：

$$\xi^{(k+1)}=\mathrm{ISMR}\left(\boldsymbol{s}_B^{(k)}\right) \tag{11}$$

式中，k为迭代次数。这里需注意的是，$\boldsymbol{\Xi}$可能不是正定矩阵。当$\boldsymbol{\Xi}$为非正定矩阵时，对该矩阵进行对角加载，使其满足正定，即

$$\boldsymbol{\Xi}=\begin{cases}\boldsymbol{\Xi}, & \boldsymbol{\Xi}\text{为正定矩阵}\\ \boldsymbol{\Xi}+\mu\boldsymbol{I}_{N_{\rm t}N}, & \text{其他}\end{cases} \tag{12}$$

式中，$\mu>-\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Xi})$，$\lambda_{\min}(\cdot)$表示矩阵最小特征值。当$\boldsymbol{\Xi}$非正定时，目标函数$\boldsymbol{s}_B^{\rm H}(\boldsymbol{\Xi}+\mu\boldsymbol{I}_{N_{\rm t}N})\boldsymbol{s}_B=\boldsymbol{s}_B^{\rm H}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{s}_B+\mu N_{\rm t}N$，其中$\mu N_{\rm t}N$为常数，因此，对$\boldsymbol{\Xi}$矩阵的对角进行加载操作，不会影响问题(8)的解。在Dinkelbach方法[31]中已证明，问题(8)的目标函数的解等价于$f(\boldsymbol{s}_B^{(k+1)},\xi^{(k+1)})=0$的解。因此，基于每次迭代更新的$\xi^{(k)}$，可以通过以下问题对$\boldsymbol{s}_B$进行优化：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{s}_B}\ f\left(\boldsymbol{s}_B,\xi^{(k)}\right)\\&\text{s.t. angle}\left(\boldsymbol{s}_B(i)\right)\in\mathcal{X}_B,\\&\qquad|\boldsymbol{s}_B(i)|=q,\ i=1,2,\cdots,N_{\rm t}N\end{aligned} \tag{13}$$

问题(13)中约束条件包括离散相位约束以及恒模约束，可以利用ADPM算法[32]进行求解。

3.2 ADPM算法求解问题(13)

ADPM算法与利用固定惩罚因子的传统ADMM算法不同，ADPM算法采用动态更新惩罚因子的方式，使惩罚项($\|\tilde{\boldsymbol{s}}_B-\boldsymbol{s}_B\|_2^2$)趋近0，在确保算法的收敛性的同时，可以使得算法能够找到相对较优的可行解。基于该算法框架，引入一个辅助变量$\tilde{\boldsymbol{s}}_B$，问题(13)等效表示为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{s}_B,\tilde{\boldsymbol{s}}_B}\ f\left(\boldsymbol{s}_B,\xi^{(k)}\right)\\&\text{s.t. }\boldsymbol{s}_B=\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\\&\qquad\text{angle}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)\right)\in\mathcal{X}_B,\\&\qquad|\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)|=q,\ i=1,2,\cdots,N_{\rm t}N\end{aligned} \tag{14}$$

根据ADPM算法原理，式(14)的增广拉格朗日函数表达式为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\boldsymbol{s}_B,\varrho,\boldsymbol{p}\right)=&f\left(\boldsymbol{s}_B,\xi^{(k)}\right)+\Re\{\boldsymbol{p}^{\rm H}(\tilde{\boldsymbol{s}}_B-\boldsymbol{s}_B)\}\\&+\varrho/2\left\|\tilde{\boldsymbol{s}}_B-\boldsymbol{s}_B\right\|_2^2\end{aligned} \tag{15}$$

式中，$\Re\{\cdot\}$代表实部，$\boldsymbol{p}\in\mathbb{C}^{N_{\rm t}N}$和$\varrho>0$分别为拉格朗日乘子向量与惩罚因子。

基于ADPM算法框架，在离散相位约束与恒模约束条件下，通过最小化$\mathcal{L}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\boldsymbol{s}_B,\varrho,\boldsymbol{p}\right)$准则交替优化更新变量$\tilde{\boldsymbol{s}}_B$与$\boldsymbol{s}_B$，以及更新变量$\varrho$与$\boldsymbol{p}$。在本文中，用$\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t)},\boldsymbol{s}_B^{(t)},\varrho^{(t)},\boldsymbol{p}^{(t)}$表示第$t$次迭代时$\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\boldsymbol{s}_B,\varrho,\boldsymbol{p}$的优化结果。通过ADPM算法求解问题(10)的逼近解，主要有以下优化步骤：

步骤1 优化变量$\tilde{\boldsymbol{s}}_B$

固定$\boldsymbol{s}_B^{(t)},\varrho^{(t)},\boldsymbol{p}^{(t)}$的值，最小化增广拉格朗日函数$\mathcal{L}(\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\boldsymbol{s}_B^{(t)},\varrho^{(t)},\boldsymbol{p}^{(t)})$，针对$\tilde{\boldsymbol{s}}_B$的优化问题可表示为

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}\leftarrow\min_{\tilde{\boldsymbol{s}}_B}\mathcal{L}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\boldsymbol{s}_B^{(t)},\boldsymbol{p}^{(t)},\varrho^{(t)}\right)\\&\qquad\text{s.t. angle}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)\right)\in\mathcal{X}_B,\\&\qquad\qquad|\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)|=q,\ i=1,2,\cdots,N_{\rm t}N\end{aligned} \tag{16}$$

忽略目标函数$\mathcal{L}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\boldsymbol{s}_B^{(t)},\varrho^{(t)},\boldsymbol{p}^{(t)}\right)$与$\tilde{\boldsymbol{s}}_B$无关的项，可进行以下变换与化简：

$$
\begin{aligned}
&\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{s}}_B}\mathcal{L}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B,\boldsymbol{s}_B^{(t)},\boldsymbol{p}^{(t)},\varrho^{(t)}\right)\\
&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{s}}_B}\Re\left\{\boldsymbol{p}^{(t)\mathrm{H}}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B-\boldsymbol{s}_B^{(t)}\right)\right\}+\frac{\varrho^{(t)}}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{s}}_B-\boldsymbol{s}_B^{(t)}\right\|_2^2\\
&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{s}}_B}\Re\left\{\left(\boldsymbol{p}^{(t)}\right)^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{s}}_B\right\}-\varrho^{(t)}\Re\left\{\boldsymbol{s}_B^{(t)\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{s}}_B\right\}\\
&=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{s}}_B}\Re\left\{(\boldsymbol{p}^{(t)}-\varrho^{(t)}\boldsymbol{s}_B^{(t)})^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{s}}_B\right\}
\end{aligned}\tag{17}
$$

因此，问题(16)可等价表示为

$$
\begin{aligned}
&\min_{\tilde{\boldsymbol{s}}_B}\ \Re\left\{\left(\boldsymbol{p}^{(t)}-\varrho^{(t)}\boldsymbol{s}_B^{(t)}\right)^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{s}}_B\right\}\\
&\text{s.t. angle}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)\right)\in\mathcal{X}_B,\\
&\qquad|\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)|=q,\ i=1,2,\cdots,N_{\mathrm{t}}N
\end{aligned}\tag{18}
$$

由问题(18)不难发现，目标函数和约束条件对于$\{\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)\}$是可分离的，即问题(18)中的$N_{\mathrm{t}}N$个变量可采用并行优化。针对$\tilde{\boldsymbol{s}}_B$中的第$i$个元素，可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\max_{\tilde{s}_B(i)}\Re\left\{(\boldsymbol{\psi}^{(t)}(i))^{\mathrm{H}}\tilde{s}_{B(i)}\right\}\\
&\text{s.t. angle}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)\right)\in\mathcal{X}_B,\\
&\qquad|\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)|=q,\ i=1,2,\cdots,N_{\mathrm{t}}N
\end{aligned}\tag{19}
$$

式中，$\boldsymbol{\psi}^{(t)}=\varrho^{(t)}\boldsymbol{s}_B^{(t)}-\boldsymbol{p}^{(t)}$。问题(19)可进一步化简为

$$
\begin{aligned}
&\max_{\omega_i}\cos(\omega_i-\alpha_i)\\
&\text{s.t. }\omega_i\in\mathcal{X}_B
\end{aligned}\tag{20}
$$

式中，ω_i与α_i分别为$\tilde{\boldsymbol{s}}_B(i)$与$\boldsymbol{\psi}^{(t)}(i)$的相位。问题(20)离散相位闭式解$\omega_i$为

$$\omega_i=\frac{\pi}{L}+\frac{2\pi}{L}\tilde{l}\tag{21}$$

式中，

$$\tilde{l}=\underset{l=0,1,\cdots,L-1}{\arg\max}\ \{\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_{L-1}\}\tag{22}$$

其中，$\tau_l=\cos\left(\pi/L+(2\pi/L)l-\alpha_i\right)$，$l=0,1,\cdots,L-1$。通过式(21)得到相位$\omega_i$后，代入式(1)，可得到$\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}$。

步骤2　优化变量$\boldsymbol{s}_B$

固定$\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)},\varrho^{(t)},\boldsymbol{p}^{(t)}$的值，最小化增广拉格朗日函数$\mathcal{L}(\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)},\boldsymbol{s}_B,\boldsymbol{p}^{(t)},\varrho^{(t)})$，针对$\boldsymbol{s}_B$的更新优化问题可表示为

$$\boldsymbol{s}_B^{(t+1)}\leftarrow\min_{\boldsymbol{s}_B}\mathcal{L}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)},\boldsymbol{s}_B,\boldsymbol{p}^{(t)},\varrho^{(t)}\right)\tag{23}$$

与式(17)类似，将问题(23)目标函数$\mathcal{L}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)},\boldsymbol{s}_B,\boldsymbol{p}^{(t)},\varrho^{(t)}\right)$中与$\boldsymbol{s}_B$无关项去除，并进行向量与矩阵等式变换与化简，可得

$$\min_{\boldsymbol{s}_B}\boldsymbol{s}_B^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\varXi}^{(t+1)}\boldsymbol{s}_B-\Re\left\{\left(\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(t+1)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{s}_B\right\}\tag{24}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(t+1)}=\varrho^{(t)}\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}+\boldsymbol{p}^{(t)}$，$\boldsymbol{\varXi}^{(t+1)}=\boldsymbol{\varXi}+\varrho^{(t)}\boldsymbol{I}_{N_{\mathrm{t}}N}/2$。令式(24)目标函数1阶导数为0可求得最优解为

$$\boldsymbol{s}_B^{(t+1)}=\left(\boldsymbol{\varXi}^{(t+1)}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(t+1)}/2\tag{25}$$

为避免在每次迭代中直接对$\boldsymbol{\varXi}^{(t+1)}$进行求逆，从而减少计算量，设$\boldsymbol{\varXi}$的特征分解如下：

$$\boldsymbol{\varXi}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\varLambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\tag{26}$$

式中，$\boldsymbol{\varLambda}$为$\boldsymbol{\varXi}$的特征值对角矩阵，$\boldsymbol{U}$为特征向量酉矩阵，可知$\boldsymbol{\varXi}^{(t+1)}$的逆可以表示为

$$\left(\boldsymbol{\varXi}^{(t+1)}\right)^{-1}=\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{\varXi}+\varrho^{(t)}\boldsymbol{I}_{N_{\mathrm{t}}N}/2\right)^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\tag{27}$$

由于$\boldsymbol{\varLambda}$与$\boldsymbol{U}$在更新过程中保持不变，因此可在ADPM算法开始前预先获得，后续更新过程中只需进行对角矩阵$\boldsymbol{\varXi}+\varrho^{(t)}\boldsymbol{I}_{N_{\mathrm{t}}N}/2$求逆运算和矩阵相乘运算。因此，设迭代次数为$t_{\max}$，计算量可由$O(t_{\max}N_{\mathrm{t}}^3N^3)$降为$O(t_{\max}N_{\mathrm{t}}^2N^2+N_{\mathrm{t}}^3N^3)$。

步骤3　更新惩罚因子ϱ与拉格朗日乘子向量$\boldsymbol{p}$

本文采用的ADPM算法基于原始残差值$\Delta\bar{s}^{(t)}=\|\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}-\boldsymbol{s}_B^{(t)}\|_2$对惩罚因子$\varrho$进行更新。若$\Delta\bar{s}^{(t)}$未随着迭代次数的增加而减小，则加大$\varrho^{(t)}$，迫使惩罚项趋近0，从而寻找到可行解。如果$\Delta\bar{s}^{(t)}$随着迭代次数的增加而减小，则$\varrho^{(t)}$可以保持不变。即$\varrho^{(t+1)}$表示为[32]

$$\varrho^{(t+1)}=\begin{cases}\varrho^{(t)}, & \Delta\bar{s}^{(t+1)}\le\Delta\bar{s}^{(t)}\\ \varrho^{(t)}\delta, & \text{其他}\end{cases}\tag{28}$$

式中，δ为正实数，且满足$\delta>1$。

固定$\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)},\boldsymbol{s}_B^{(t+1)},\varrho^{(t+1)}$，拉格朗日乘子向量$\boldsymbol{p}$的更新值表达式为[32]

$$\boldsymbol{p}^{(t+1)}=\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}, & p_{\max}^{(t+1)}\le\nu\\ \tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}/p_{\max}^{(t+1)}, & \text{其他}\end{cases}\tag{29}$$

式中，ν为足够大的正数，$\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}$与$p_{\max}^{(t+1)}$表达式为

$$\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}=\boldsymbol{p}^{(t)}+\varrho^{(t+1)}\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}-\boldsymbol{s}_B^{(t+1)}\right)\tag{30}$$

$$p_{\max}^{(t+1)}=\max\left\{|\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}(1)|,|\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}(2)|,\cdots,|\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}(N_{\mathrm{t}}N)|\right\}\tag{31}$$

由式(30)可发现，$\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}$的模值会随着$\varrho^{(t+1)}$的增大而增大，但是当$\tilde{\boldsymbol{p}}^{(t+1)}$模值过大时，容易导致ADPM算法不收敛。因此，式(29)在更新$\boldsymbol{p}^{(t+1)}$时，首先判断$\boldsymbol{p}^{(t+1)}$中元素绝对值的最大值是否超过设定的门限值，若大于该门限值，则进行归一化处理。

如果$\varrho^{(t+1)}$与$\boldsymbol{p}^{(t+1)}$的更新值分别为$\varrho^{(t+1)}=\varrho^{(t)}$，$\boldsymbol{p}^{(t+1)}=\boldsymbol{p}^{(t)}+\varrho^{(t+1)}(\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}-\boldsymbol{s}_B^{(t+1)})$，则该ADPM

算法与传统ADMM算法等价。相比固定惩罚因子的ADMM算法，ADPM算法的惩罚因子动态更新策略可以使得算法在确保收敛的同时有望找到相对更优的可行解。

3.3 ADPM算法迭代终止条件与初始值

根据文献[33]，可将迭代终止条件设置为

$$\begin{cases}(\text{a}): \|\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)} - \boldsymbol{s}_B^{(t+1)}\|_2 \le \delta_{\text{pri}}^{(t+1)} \\ (\text{b}): \varrho^{(0)}\|\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t)} - \tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}\|_2 \le \delta_{\text{dual}}^{(t+1)}\end{cases} \tag{32}$$

式中，$\delta_{\text{pri}}^{(t+1)} > 0$与$\delta_{\text{dual}}^{(t+1)} > 0$分别为第$t+1$次迭代的原始残差与对偶残差的可行性容忍度，这两个值可以根据绝对和相对标准进行选择，即

$$\delta_{\text{pri}}^{(t+1)} = \sqrt{2N_{\text{t}}N}\delta_{\text{abs}} + \delta_{\text{rel}}\max\left\{\left\|\boldsymbol{s}_B^{(t+1)}\right\|_2, \left\|\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}\right\|_2\right\} \tag{33}$$

$$\delta_{\text{dual}}^{(t+1)} = \sqrt{2N_{\text{t}}N}\delta_{\text{abs}} + \delta_{\text{rel}}\left\|\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}\right\|_2 \tag{34}$$

其中，$\delta_{\text{abs}} > 0$是绝对误差，$\delta_{\text{rel}} > 0$是相对误差。当满足式(32)中任一个终止条件，ADPM算法迭代停止，得到$\hat{\boldsymbol{s}}_B^\star = \boldsymbol{s}_B^{(t+1)}$。进入到外循环，令$\boldsymbol{s}_B^{(k+1)} = \hat{\boldsymbol{s}}_B^\star$并根据式(11)获得$\xi^{(k+1)}$。当$f(\boldsymbol{s}_B^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) = 0$时，输出问题的解$\boldsymbol{s}_B^\star$。

另外，初始值$\varrho^{(0)}$会影响算法的收敛速度。文献[34]利用正则最小化和二次规划约束找到ADMM迭代收敛因子最小的最优初始值参数。本文采用的ADPM算法为ADMM算法的改进算法，对ADMM初始值的选取方式在ADPM算法中同样适用。因此，本文所根据文献[34]所提方法思想，将ADPM算法的惩罚因子初始值$\varrho^{(0)}$设置为

$$\varrho^{(0)} = \sqrt{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Xi})\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Xi})} \tag{35}$$

式中，$\lambda_{\max}(\cdot)$表示矩阵最大特征值。

初始发射波形信号采用正交线性调频信号$\boldsymbol{S}^{(0)}$，$\boldsymbol{S}^{(0)}$矩阵的第(m,n)个元素表示为

$$\boldsymbol{S}^{(0)}(m,n) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi m(n-1)/N}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(n-1)^2/N}}{\sqrt{N_{\text{t}}N}} \tag{36}$$

式中，$m = 1,2,\cdots,N_{\text{t}}$与$n = 1,2,\cdots,N$。$N_{\text{t}}N \times 1$维初始发射信号向量形式$\boldsymbol{s}_B^{(0)}$可通过堆叠$\boldsymbol{S}^{(0)}$的列来获得。

3.4 算法收敛性与复杂度

本文所提算法外层循环采用Dinkelbach法，内层循环采用ADPM算法，算法伪代码如表1所示。为分析算法的收敛性，首先证明序列$\{\xi^{(k)}\}$是单调减小的。

定义：$h(\xi) = \min\limits_{\boldsymbol{s}_B} f(\boldsymbol{s}_B, \xi) = \boldsymbol{s}_B^{\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{s}}\boldsymbol{s}_B - \xi\boldsymbol{s}_B^{\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B$。由$\xi^{(k+1)} = \text{ISMR}(\boldsymbol{s}_B^{(k)}) = \dfrac{\boldsymbol{s}_B^{(k)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{s}}\boldsymbol{s}_B^{(k)}}{\boldsymbol{s}_B^{(k)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B^{(k)}}$，可推导得

表 1 丁克尔巴赫交替方向惩罚法的低精度量化MIMO雷达恒模波形设计算法

Tab. 1 MIMO radar constant modulus waveform design algorithm with low-precision quantized based on DADPM

输入：$\boldsymbol{s}_B^{(0)}, \xi^{(0)}, B, \delta, \nu, \epsilon$；
输出：$\boldsymbol{s}_B^\star$；
步骤1：设置 $k = 0$；
步骤2：初始化：$\varrho^{(0)}, \boldsymbol{p}^{(0)}$；
步骤3：计算$\boldsymbol{\Xi}^{(k)} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{s}} - \xi^{(k)}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}$；
步骤4：设置 $t = 0$；
步骤5：更新$\tilde{\boldsymbol{s}}_B^{(t+1)}$与$\boldsymbol{s}_B^{(t+1)}$，分别通过解问题(16)与问题(23)；
步骤6：更新$\varrho^{(t+1)}$和$\boldsymbol{p}^{(t+1)}$，通过式(28)与式(29)；
步骤7：更新内循环迭代次数，令$t = t+1$；
步骤8：重复步骤5—步骤7，直到满足式(32)中任一停止条件，存储$\boldsymbol{s}_B^{(t+1)}$；
步骤9：令$\boldsymbol{s}_B^{(k+1)} = \boldsymbol{s}_B^{(t+1)}$，计算$\xi^{(k+1)} = \text{ISMR}(\boldsymbol{s}_B^{(k+1)})$；
步骤10：更新外循环迭代次数，令$k = k+1$；
步骤11：重复步骤2—步骤10，直到$f(\boldsymbol{s}_B^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) \le \epsilon$；
步骤12：返回：问题(8)的解$\boldsymbol{s}_B^\star = \boldsymbol{s}_B^{(k+1)}$。

$$\begin{aligned}h\left(\xi^{(k)}\right) &= \boldsymbol{s}_B^{(k)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{s}}\boldsymbol{s}_B^{(k)} - \xi^{(k)}\left(\boldsymbol{s}_B^{(k)}\right)^{\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B^{(k)} \\ &= \boldsymbol{s}_B^{(k)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B^{(k)}\left(\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}\right)\end{aligned} \tag{37}$$

又因$\boldsymbol{s}_B^{(k)} = \arg\min\limits_{\boldsymbol{s}_B} \boldsymbol{s}_B^{\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{s}}\boldsymbol{s}_B - \xi^{(k)}\boldsymbol{s}_B^{\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B$，可得

$$\begin{aligned}h\left(\xi^{(k)}\right) &= \boldsymbol{s}_B^{(k)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{s}}\boldsymbol{s}_B^{(k)} - \xi^{(k)}\boldsymbol{s}_B^{(k)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B^{(k)} \\ &\le \boldsymbol{s}_B^{(k-1)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{s}}\boldsymbol{s}_B^{(k-1)} - \xi^{(k)}\boldsymbol{s}_B^{(k-1)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B^{(k-1)} = 0\end{aligned} \tag{38}$$

结合式(37)与式(38)，可得$\boldsymbol{s}_B^{(k)\text{H}}\boldsymbol{\Omega}_{\text{m}}\boldsymbol{s}_B^{(k)}(\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}) \le 0$，即

$$\xi^{(k+1)} \le \xi^{(k)} \tag{39}$$

由式(39)得出，Dinkelbach法具有严格的单调性。内层循环采用ADPM算法，其中惩罚因子基于原始残差值动态更新，避免了传统ADMM算法在处理NP-hard问题时依赖惩罚因子初始值选取而存在不收敛问题，保证任意初始值情况下的收敛性[32]。综上，本文提出的DADPM算法中外循环Dinkelbach法具有严格的单调性，内循环ADPM算法具有强收敛性，可得出DADPM算法具有良好的收敛性。

本文所提出的低精度恒模发射波形设计方法计算复杂度主要与迭代次数、离散相位个数、发射阵列天线数和信号快拍数有关。B比特信号离散相位符号表个数为$L = 2^{B+1}$个，N_{t}个发射天线，N个快拍下，内循环ADPM算法迭代的计算复杂度为$O(t_{\max}N_{\text{t}}^2N^2 + N_{\text{t}}^3N^3)$。假设外循环Dinkelbach算法迭代收敛时，最大迭代次数为$k_{\max}$，则整个算法的计算复杂度为$O(t_{\max}k_{\max}N_{\text{t}}^2N^2 + k_{\max}N_{\text{t}}^3N^3)$。

4　数值仿真

在本文实验中，测试了不同参数下所提方法的性能。发射阵列天线数设置为$N_t = 15$，样本数为$N = 100$。发射信号总功率固定为$E = 1$。以1°为采样间隔，在整个空域($\theta \in [-90°, 90°]$)均匀采样。主瓣对称情况下，单主瓣区域设置为$\boldsymbol{\Omega}_m = [-10°, 10°]$，副瓣为$\boldsymbol{\Omega}_s = [-90°, 9°] \cup [11°, 90°]$。双主瓣区域设置为$\boldsymbol{\Omega}_m = [-40°, -30°] \cup [30°, 40°]$，副瓣$\boldsymbol{\Omega}_s = [-90°, -41°] \cup [-29°, 29°] \cup [41°, 90°]$。主瓣非对称情况下，双主瓣区域设置为$\boldsymbol{\Omega}_m = [-40°, -30°] \cup [15°, 30°]$，副瓣为$\boldsymbol{\Omega}_s = [-90°, -41°] \cup [-29°, 14°] \cup [31°, 90°]$。

为了方便算法性能分析，针对极低精度(1比特)量化的波形分析，本文提出的基于ADPM算法的1比特量化的波形(DADPM-1bit)对比了基于无穷比特(无量化/无相位约束)的ADMM优化算法设计的恒模发射波形[20](ADMM-∞bit)与该无穷比特波形直接运用符号函数量化后得到的1比特量化的波形(QADMM-1bit)。还对比了5种针对1比特量化DAC的设计方法，分别为：基于BCD算法的设计方法[21](BCD-1bit)、两种基于广义似然上升搜索算法的设计方法[22](GLAS1-1bit, GLAS2-1bit)、基于SDR算法的设计方法[23](SDR-1bit)、基于ADMM算法的1比特波形设计方法[25](ADMM1-1bit)。

针对低精度(2~5比特)量化波形，测试了主瓣对称与非对称情况下本文提出的基于DADPM算法的2~5比特量化的波形(DADPM-Bbit, $B = 2, 3, \cdots, 5$)性能，同时与基于ADMM优化算法的无穷比特恒模发射波形直接量化为2~5比特的波形(QADMM-Bbit, $B = 2, 3, \cdots, 5$)进行分析比较。

4.1　极低精度(1比特)量化波形性能分析

本节测试分析极低精度1比特量化波形的性能。对于1比特量化的波形，其$B = 1$，相位符号数为$L = 2^{B+1} = 4$个，根据式(2)计算，相位符号表示为$\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$。图3为极低精度量化的对称单主瓣波形序列相位分布图，展示了不同方法的相位分布情况。从图3可见，ADMM-∞bit算法波形序列元素的相位个数远远超过4个相位，其他本文测试的所有1比特量化的波形方案相位均属于$\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$中。

极低精度1比特量化的波形对称单主瓣与双主瓣波形性能分别如图4和图5所示。图4(a)与图5(a)分别为1比特量化的对称单主瓣与双主瓣波形方向图，横坐标均为空间角度，纵坐标为发射信号在该方向上的平均功率，可通过式(5)计算得到。图4(b)和图5(b)分别为1比特量化波形的对称单主瓣与双主瓣ISMR与迭代次数k关系图，横坐标为迭代次数，纵坐标为系统ISMR。

从图4(a)可明显观察到，无穷比特的恒模方案(ADMM-∞bit)具有最低的副瓣，且主瓣区域较宽、有良好的增益，但该无穷比特波形直接量化为1比特波形后(QADMM-1bit)，副瓣明显提高，高于本文测试的所有基于1比特DAC设计的波形，且主瓣中心出现轻微下陷现象。相比另外5种基于1比特DAC设计的波形，本文所提方法具有最低的副瓣，在主瓣区间也有良好的增益。这种波形现象对应在波形ISMR表现为ADMM-∞bit具有最低ISMR，当该无穷量化精度波形直接量化应用在1比特DAC组件时(QADMM-1bit)，ISMR提高了将近11 dB，皆高于其他1比特波形的ISMR。本文提出的DADPM-1bit波形，相较于无穷比特波形，ISMR提高了大约6 dB，相较于其他1比特波形，ISMR值最低。

从图5(a)可观察到，ADMM-∞bit波形具有最低副瓣，其他1比特量化算法波形方向图大致重合。因此，图5(b)中，ADMM-∞bit波形ISMR明显最低，其他1比特波形ISMR相差不大，但仍可以看出，无穷比特波形直接量化的QADMM-1bit波形的ISMR最高，本文提出的DADPM-1bit波形的ISMR最低。

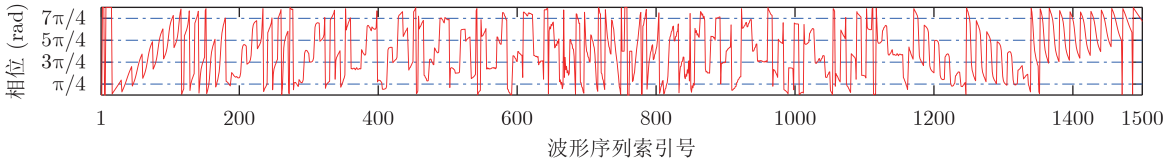
表2为极低精度1比特量化的主瓣对称情况下不同算法1000次蒙特卡罗实验性能统计表。从表格运算时间可发现，相同条件下，SDR-1bit算法运算时间最长，GLAS1-1bit算法运算时间最短。本文所提DADPM-1bit算法性能明显优于其他极低算法性能，但运算时间相对较长。

4.2　低精度(2~5比特)量化的波形性能分析

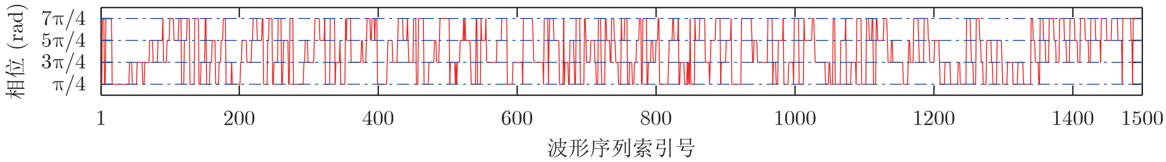
本节测试分析了本文所提方法和基于ADMM优化算法的无穷比特(无相位约束)恒模发射波形与其直接量化为不同量化精度的低精度波形性能。测试的量化精度为2比特、3比特、4比特、5比特和无穷比特的ADMM算法。图6(a)与图7(a)分别为低精度2~5比特量化的对称单主瓣与双主瓣波形方向图。图6(b)与图7(b)分别为低精度2~5比特量化波形的对称单主瓣与双主瓣ISMR与迭代次数k关系图。

从图6(a)可明显观察到，ADMM方案经过低精度量化后，主瓣会出现中心下凹的现象，且本文所提方案明显比低精度量化后的ADMM方案具有更低的副瓣。图6(b)为对称单主瓣ISMR与迭代次数关系图，从图6可发现，相较于ADMM-∞bit波形，

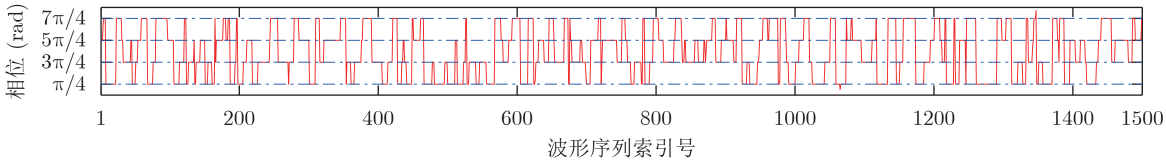
本文所提DADPM-5bit波形ISMR差距约5 dB。与相同精度量化的ADMM波形相比，本文所提低精度量化的DADPM算法设计的波形具有更低的ISMR。



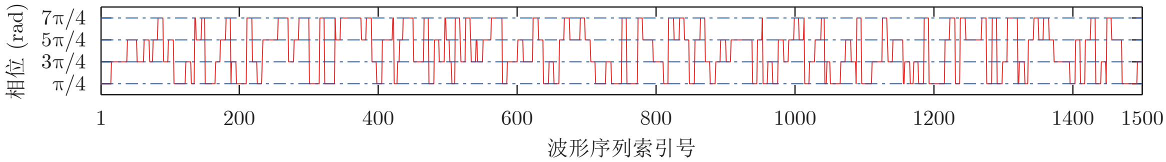
(a) ADMM-∞bit



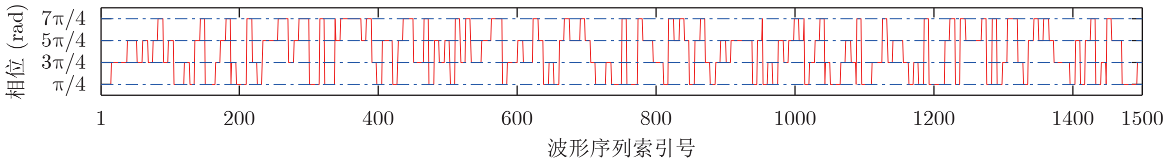
(b) QADMM-1bit



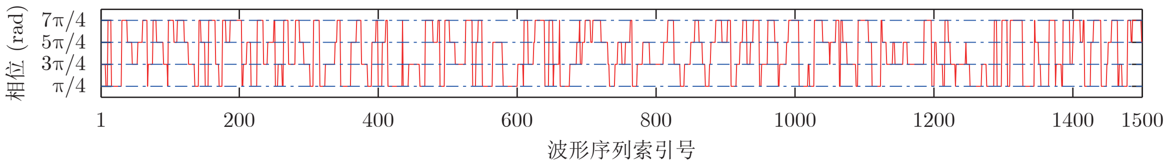
(c) ADMM1-1bit



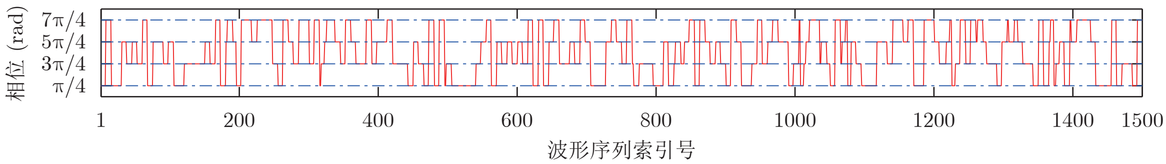
(d) GLAS1-1bit



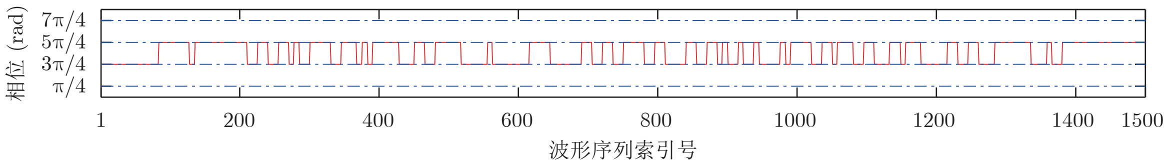
(e) GLAS2-1bit



(f) SDR-1bit



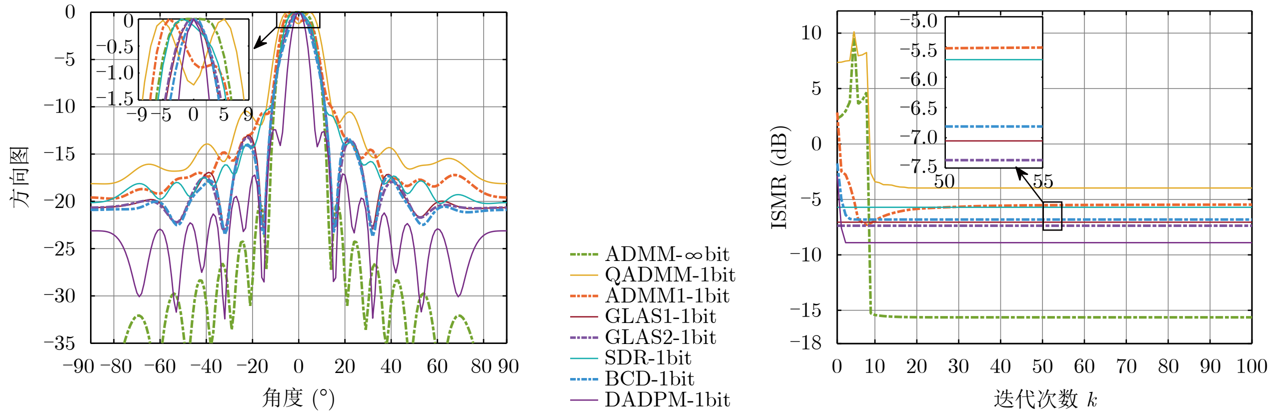
(g) BCD-1bit



(h) DADPM-1bit

图 3 极低精度1比特量化的对称单主瓣波形序列相位分布图

Fig. 3 1-bit quantized waveform for single symmetrical mainlobe element phase diagram

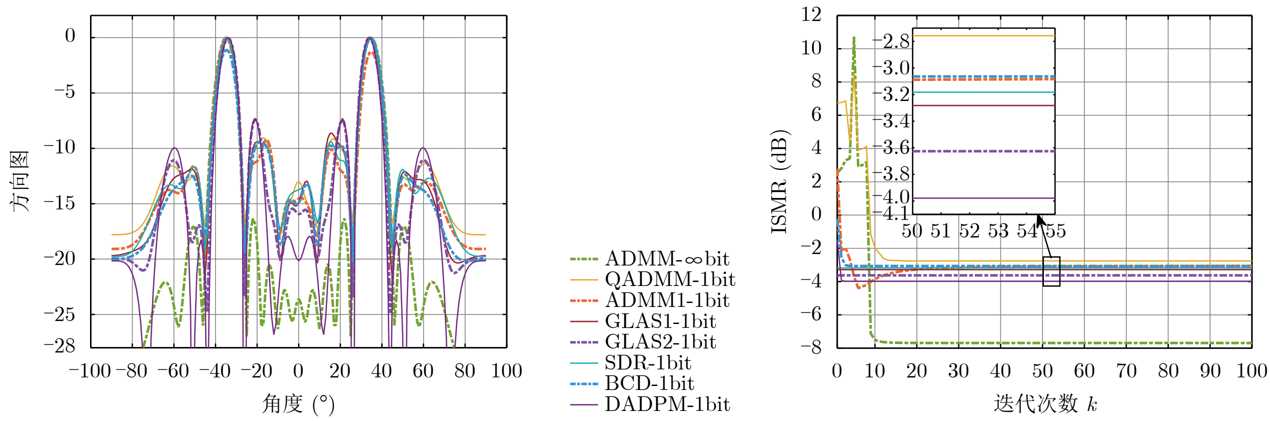


(a) 对称单主瓣波形方向图
(a) Single symmetrical mainlobe beampattern

(b) 对称单主瓣ISMR与迭代次数关系图
(b) Single symmetrical mainlobe ISMR versus iteration number

图 4 极低精度1比特对称单主瓣波形方向图和ISMR与迭代次数关系图

Fig. 4　1-bit quantized waveform for single symmetrical mainlobe beampattern and the relationship between ISMR versus iteration number



(a) 对称双主瓣波形方向图
(a) Two symmetrical mainlobe beampattern

(b) 对称双主瓣ISMR与迭代次数关系图
(b) Two symmetrical mainlobe ISMR versus iteration number

图 5 极低精度1比特量化的对称双主瓣波形方向图和ISMR与迭代次数关系图

Fig. 5　1-bit quantized waveform for two symmetrical mainlobe beampattern and the relationship between ISMR versus iteration number

表 2 主瓣对称下极低精度量化波形算法性能统计表

Tab. 2　Performance statistics table of the extreme low precision quantized waveform algorithm for symmetrical mainlobe

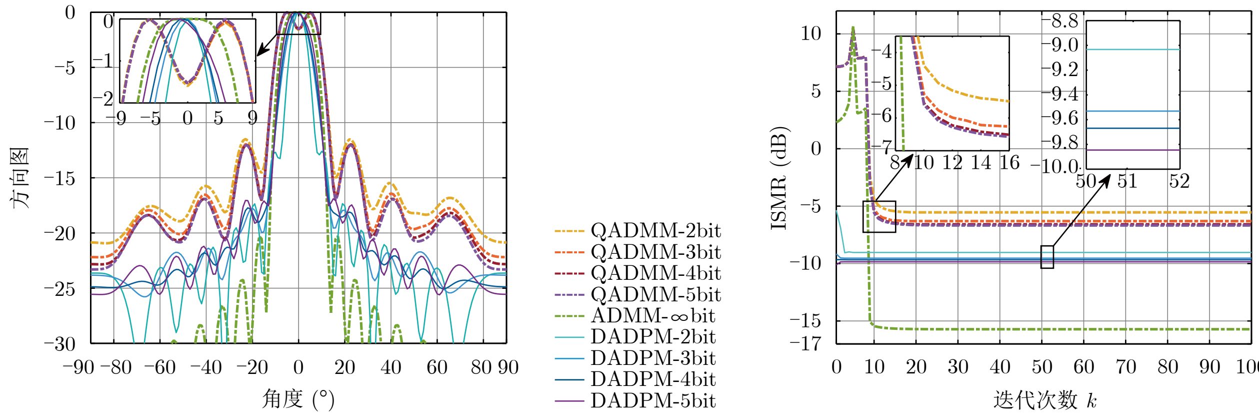
主瓣对称情况下方法	最小ISMR (dB)		最大ISMR (dB)		平均ISMR (dB)		运算时间(s)	
	单主瓣	双主瓣	单主瓣	双主瓣	单主瓣	双主瓣	单主瓣	双主瓣
ADMM-∞bit	–15.7192	–7.6825	11.1782	9.4329	–15.1842	–7.3031	2.3527	2.0368
QADMM-1bit	–4.1057	–3.9953	10.1032	–1.3280	–4.2891	–3.9872	2.3865	2.1003
ADMM-1bit	–7.1965	–6.7244	2.3044	–4.6130	–5.3700	–5.1329	3.1457	2.6269
GLAS1-1bit	–7.6930	–7.7134	–6.9940	–6.6514	–7.3283	–7.1467	0.0106	0.0104
GLAS2-1bit	–7.6170	–8.3327	–6.5995	–7.6447	–7.0952	–7.9970	0.0736	0.0748
SDR-1bit	–5.9636	–7.0137	–5.5988	–6.7182	–5.7154	–6.8256	37.8250	38.0630
BCD-1bit	–6.8706	–3.0849	–2.0389	–0.2157	–6.8327	–3.0587	0.1972	0.1964
DADPM-1bit	–8.8275	–3.9973	–2.5693	–1.7831	–8.6527	–3.9812	8.5147	8.3249

从图7(a)可观察到，本文所提低精度波形与量化后的ADMM波形较为接近，主瓣大体重合，

ADMM-∞bit波形具有较低的副瓣。从图7(b)可观察到，对称双主瓣时，相较于ADMM-∞bit波形，本文所提DADPM-5bit波形ISMR差距约1 dB。相同量化精度下，本文所提低精度量化的DADPM算法设计的波形比直接量化后的ADMM算法波形具有更低的ISMR。通过图6(b)与图7(b)可观察到，随着DAC量化精度提高，波束的ISMR减小，但ISMR下降的幅度值越来越小。

图8为低精度(2~5比特)非对称双主瓣波形方向图和ISMR与迭代次数关系图。从图8(a)可观察到，当两个主瓣不对称时，其中一个主瓣的峰值会下降，甚至主瓣区域内产生零陷。主要由于优化准则为最小化积分(离散累加和)副瓣与主瓣的比值，且矩阵 $\boldsymbol{R}(\theta)$ 具有共轭性，使得 $P_{\mathrm{t}}(\theta)+P_{\mathrm{t}}(-\theta)=\boldsymbol{s}_B^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}(\theta)+\boldsymbol{R}(-\theta))\boldsymbol{s}_B=2\boldsymbol{s}_B^{\mathrm{H}}\Re\{\boldsymbol{R}(\theta)\}\boldsymbol{s}_B$，因此，非对称情况下无法保证每个主瓣都有一个较高的峰值，而主瓣对称情况下，可使得两个主瓣都具有较好的增益，如图5(a)与图7(a)。从图8(b)可观察到，主瓣非对称时，ADMM-∞bit波形直接量化后，ISMR值提高超过6 dB以上，而本文所提2~5比特低精度DADPM波形与ADMM-∞bit波形的ISMR相差约1 dB。

表3为低精度量化的对称主瓣波形算法在1000次蒙特卡罗实验下的性能统计表。从表3运算时间可发现，本文所提DADPM算法，不同精度对算法的运算时间没有太大影响，精度越高波形ISMR越

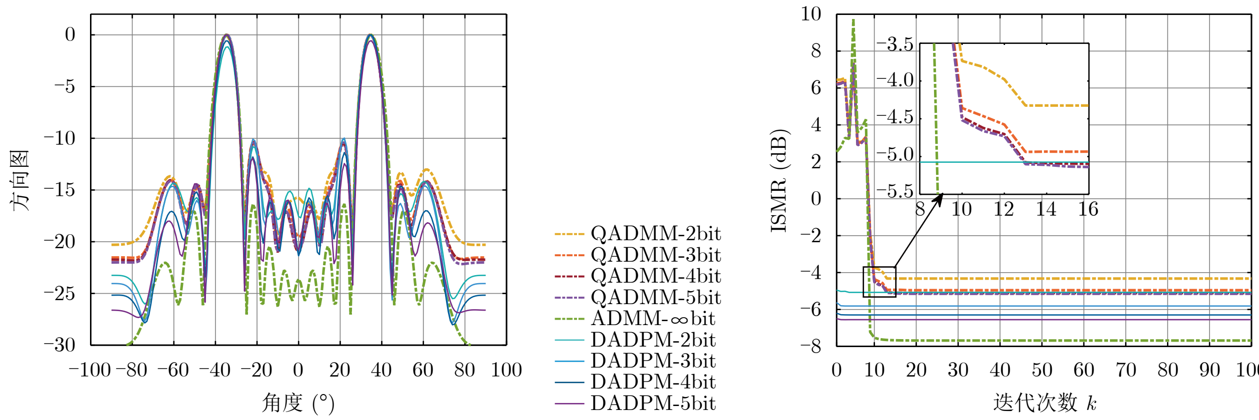


(a) 对称单主瓣波形方向图
(a) Single symmetrical mainlobe beampattern

(b) 对称单主瓣ISMR与迭代次数关系图
(b) Single symmetrical mainlobe ISMR versus iteration number

图 6 低精度(2~5比特)量化的对称单主瓣波形方向图和ISMR与迭代次数关系图

Fig. 6 Low precision quantized waveform for symmetrical single mainlobe beampattern and the relationship between ISMR versus iteration number

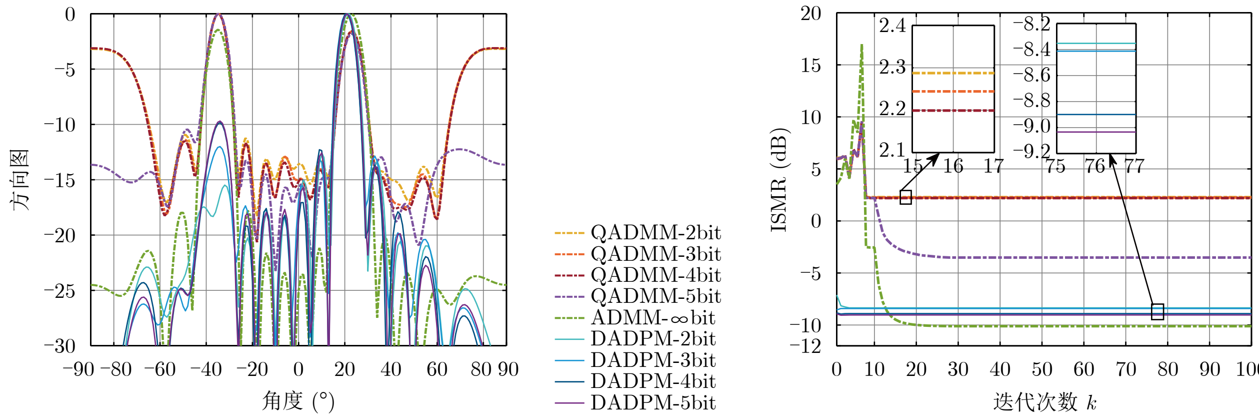


(a) 对称双主瓣波形方向图
(a) Two symmetrical mainlobe beampattern

(b) 对称双主瓣ISMR与迭代次数关系图
(b) Two symmetrical mainlobe ISMR versus iteration number

图 7 低精度(2~5比特)量化的对称双主瓣波形方向图和ISMR与迭代次数关系图

Fig. 7 Low precision quantized waveform for two symmetrical mainlobe beampattern and the relationship between ISMR versus iteration number



(a) 非对称双主瓣波形方向图
(a) Two asymmetrical mainlobe beampattern

(b) 非对称双主瓣ISMR与迭代次数关系图
(b) Two asymmetrical mainlobe ISMR versus iteration number

图 8 低精度(2~5比特)量化的非称双主瓣波形方向图和ISMR与迭代次数关系图

Fig. 8 Low precision quantized waveform for two asymmetrical mainlobe beampattern and the relationship between ISMR versus iteration number

表 3 低精度量化的对称主瓣波形算法性能统计表

Tab. 3　Performance statistics table of the low precision algorithm for symmetrical mainlobe

主瓣对称情况下算法	最小ISMR (dB)		最大ISMR (dB)		平均ISMR (dB)		运算时间(s)	
	单主瓣	双主瓣	单主瓣	双主瓣	单主瓣	双主瓣	单主瓣	双主瓣
QADMM-2bit	–5.5427	–4.3245	11.0237	7.7345	–5.4178	–4.0784	2.3814	2.1377
QADMM-3bit	–6.3020	–4.9560	11.0532	7.7081	–6.0587	–4.6564	2.3468	2.1597
QADMM-4bit	–6.5840	–5.1091	11.0863	7.6597	–6.1687	–4.9790	2.1527	2.3519
QADMM-5bit	–6.6815	–5.1490	11.1027	7.6038	–6.2214	–5.0074	2.2527	2.4368
ADMM-∞bit	–15.7192	–7.6825	11.1782	9.4329	–15.1842	–7.3031	2.3527	2.0368
DADPM-2bit	–9.0532	–5.0738	–4.8751	–4.9024	–8.7875	–4.7015	8.7756	8.2487
DADPM-3bit	–9.5309	–5.8123	–9.4311	–5.7812	–9.1178	–5.4725	8.7874	8.1834
DADPM-4bit	–9.6694	–6.2968	–9.6103	–6.1025	–9.2789	–6.1034	8.8743	8.2981
DADPM-5bit	–10.1160	–6.5541	–9.9715	–6.3251	–9.8321	–6.2753	8.8975	8.3546

小。DADPM算法的ISMR明显低于同精度量化的ADMM算法，但DADPM算法运算时间明显长于同精度量化的ADMM算法。主要是因为内循环采用的ADPM算法在迭代的同时动态更新惩罚因子，从而保证算法的收敛性。而ADMM算法惩罚因子直接根据设计人员经验或者实验总结给定，省略了算法寻找合适惩罚因子的过程，算法运算时间更短，但算法性能表现过于依赖惩罚因子。

5　结语

本文提出了一种基于低精度量化的MIMO雷达发射波形设计方法。通过设计B比特恒模发射波形序列，使发射波形对低精度量化DAC组件有更好的适配性，实现任意精度波形的最佳匹配发射。为解决所建模的恒模离散相位约束非凸优化问题，首先通过Dinkelbach算法将二次分式转换成减法形式，再运用ADPM算法框架，将离散相位约束转换为并行的三角函数问题，通过交替迭代逐步逼近最优解。低精度DAC组件可降低MIMO雷达电路结构复杂度与能耗，但这些低精度组件也会导致一定程度的性能下降。本文所提出的低精度恒模发射模型设计方法可适用于任意量化精度的发射波形设计，相对其他低精度设计方法，取得了更低的ISMR性能表现，可为实际工程应用中对波形性能要求与DAC量化精度的选择提供理论依据与参考价值。

参 考 文 献

[1]　FORSYTHE K W, BLISS D W, and FAWCETT G S. Multiple-input multiple-output (MIMO) radar: Performance issues[C]. The Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, USA, 2004: 310–315. doi: 10.1109/ACSSC.2004.1399143.

[2]　XU Haisheng, BLUM R S, WANG Jian, *et al*. Colocated

MIMO radar waveform design for transmit beampattern formation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(2): 1558–1568. doi: 10.1109/TAES.2014.140249.

[3] 朱圣棋, 余昆, 许京伟, 等. 波形分集阵列新体制雷达研究进展与展望[J]. 雷达学报, 2021, 10(6): 795–810. doi: 10.12000/JR21188.

ZHU Shengqi, YU Kun, XU Jingwei, *et al*. Research progress and prospect for the noval waveform diverse array radar[J]. *Journal of Radars*, 2021, 10(6): 795–810. doi: 10.12000/JR21188.

[4] GODRICH H, HAIMOVICH A M, and BLUM R S. Target localization accuracy gain in MIMO radar-based systems[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(6): 2783–2803. doi: 10.1109/TIT.2010.2046246.

[5] STOICA P, HE Hao, and LI Jian. Optimization of the receive filter and transmit sequence for active sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(4): 1730–1740. doi: 10.1109/TSP.2011.2179652.

[6] CAO Siyang and ZHENG Yuanfang. Recent developments in radar waveforms[J]. *Journal of Radars*, 2014, 3(5): 603–621. doi: 10.3724/SP.J.1300.2014.14044.

[7] GAO Xiang, EDFORS O, RUSEK F, *et al*. Massive MIMO performance evaluation based on measured propagation data[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(7): 3899–3911. doi: 10.1109/TWC.2015.2414413.

[8] AHMED S and ALOUINI M S. MIMO radar transmit beampattern design without synthesising the covariance matrix[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(9): 2278–2289. doi: 10.1109/TSP.2014.2310435.

[9] FAN Wen, LIANG Junli, YU Guoyang, *et al*. MIMO radar waveform design for quasi-equiripple transmit beampattern synthesis via weighted l_p-minimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(13): 3397–3411. doi: 10.1109/TSP.2019.2917871.

[10] SINGH J, DABEER O, and MADHOW U. On the limits of communication with low-precision analog-to-digital conversion at the receiver[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(12): 3629–3639. doi: 10.1109/TCOMM.2009.12.080559.

[11] LANDAU L and FETTWEIS G. On reconstructable ASK-sequences for receivers employing 1-Bit quantization and oversampling[C]. 2014 IEEE International Conference on Ultra-WideBand (ICUWB), Paris, France, 2014: 180–184. doi: 10.1109/ICUWB.2014.6958974.

[12] RISI C, PERSSON D, and LARSSON E G. Massive MIMO with 1-bit ADC[EB/OL]. http://arxiv.org/abs/1404.7736v1, 2014.

[13] HOYOS S, SADLER B M, and ARCE G R. Monobit digital receivers for ultrawideband communications[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, 4(4): 1337–1344. doi: 10.1109/TWC.2005.850270.

[14] MO Jianhua and HEATH R W. Capacity analysis of one-bit quantized MIMO systems with transmitter channel state information[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(20): 5498–5512. doi: 10.1109/TSP.2015.2455527.

[15] STOICA P, LI Jian, and XIE Yao. On probing signal design for MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(8): 4151–4161. doi: 10.1109/TSP.2007.894398.

[16] AUBRY A, DE MAIO A, and HUANG Yongwei. MIMO radar beampattern design via PSL/ISL optimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(15): 3955–3967. doi: 10.1109/TSP.2016.2543207.

[17] ZHANG Xiaojun, HE Zishu, RAYMAN-BACCHUS L, *et al*. MIMO radar transmit beampattern matching design[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(8): 2049–2056. doi: 10.1109/TSP.2015.2398841.

[18] ZHANG Weijian, HU Jinfeng, ZHOU Qihang, *et al*. Constant modulus waveform design for colocated MIMO radar: A convex relaxation approach[J]. *Digital Signal Processing*, 2021, 117: 103141. doi: 10.1016/j.dsp.2021.103141.

[19] YU Xianxiang, QIU Hui, YANG Jing, *et al*. Multispectrally constrained MIMO radar beampattern design via sequential convex approximation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(4): 2935–2949. doi: 10.1109/TAES.2022.3150619.

[20] CHENG Ziyang, HAN Chunlin, LIAO Bin, *et al*. Communication-aware waveform design for MIMO radar with good transmit beampattern[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(21): 5549–5562. doi: 10.1109/TSP.2018.2868042.

[21] HONG Mingyi, RAZAVIYAYN M, LUO Zhiquan, *et al*. A unified algorithmic framework for block-structured optimization involving big data: With applications in machine learning and signal processing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2016, 33(1): 57–77. doi: 10.1109/MSP.2015.2481563.

[22] DENG Minglong, CHENG Ziyang, LU Xiaoying, *et al*. Binary waveform design for MIMO radar with good transmit beampattern performance[J]. *Electronics Letters*, 2019, 55(19): 1061–1063. doi: 10.1049/el.2019.1602.

[23] WEI Tong, CHU Ping, CHENG Ziyang, *et al*. Transmit beampattern design for MIMO radar with one-bit DACs via block-sparse SDR[C]. 2020 IEEE 11th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), Hangzhou, China, 2020: 1–5. doi: 10.1109/SAM48682.2020.9104317.

[24] CHENG Ziyang, LIAO Bin, HE Zishu, *et al*. Transmit

signal design for large-scale MIMO system with 1-bit DACs[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2019, 18(9): 4466–4478. doi: 10.1109/TWC.2019.2925343.

[25] WEI Tong, CHENG Ziyang, and LIAO Bin. Transmit beampattern synthesis for MIMO radar with one-bit digital-to-analog converters[J]. *Signal Processing*, 2021, 188: 108228. doi: 10.1016/j.sigpro.2021.108228.

[26] CHENG Ziyang, SHI Shengnan, HE Zishu, *et al*. Transmit sequence design for dual-function radar-communication system with one-bit DACs[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2021, 20(9): 5846–5860. doi: 10.1109/TWC.2021.3070586.

[27] FAN Wen, LIANG Junli, and LI Jian. Constant modulus MIMO radar waveform design with minimum peak sidelobe transmit beampattern[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(16): 4207–4222. doi: 10.1109/TSP.2018.2847636.

[28] ALDAYEL O, MONGA V, and RANGASWAMY M. Tractable transmit MIMO beampattern design under a constant modulus constraint[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(10): 2588–2599. doi: 10.1109/TSP.2017.2664040.

[29] CHENG Ziyang, HE Zishu, ZHANG Shengmiao, *et al*. Constant modulus waveform design for MIMO radar transmit beampattern[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(18): 4912–4923. doi: 10.1109/TSP.2017.2718976.

[30] HU Jinfeng, ZHANG Weijian, ZHU Haoming, *et al*. Constant modulus waveform design for MIMO radar via manifold optimization[J]. *Signal Processing*, 2022, 190: 108322. doi: 10.1016/j.sigpro.2021.108322.

[31] DINKELBACH W. On nonlinear fractional programming[J]. *Management Science*, 1967, 13(7): 492–498. doi: 10.1287/mnsc.13.7.492.

[32] YU Xianxiang, CUI Guolong, YANG Jing, *et al*. Quadratic optimization for unimodular sequence design via an ADPM framework[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68: 3619–3634. doi: 10.1109/TSP.2020.2998637.

[33] BOYD S, PARIKH N, CHU E, *et al*. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1–122. doi: 10.1561/2200000016.

[34] GHADIMI E, TEIXEIRA A, SHAMES I, *et al*. Optimal parameter selection for the alternating direction method of multipliers (ADMM): Quadratic problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 644–658. doi: 10.1109/TAC.2014.2354892.

作 者 简 介

万　环(1992–)，女，江西南昌人，博士。主要研究方向为阵列信号处理、雷达波形设计以及最优化理论算法等。

余显祥(1991–)，男，四川人，博士。主要研究方向为雷达波形设计与处理、最优化理论算法以及阵列信号处理等。目前发表IEEE Trans期刊论文10余篇。

全　智(1978–)，男，广西柳州人，深圳大学特聘教授，博士生导师，国家优秀青年科学基金获得者。主要研究方向为远距离宽带无线通信系统、射频系统校准与测试、数据驱动的信号处理等。担任IEEE Transactions on Signal Processing等期刊编委。

廖　斌(1983–)，男，江西萍乡人，深圳大学特聘研究员，博士生导师。主要研究方向为阵列信号处理、自适应信号处理、雷达信号处理等。担任IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems等期刊编委。

(责任编辑：于青)