

互质层析SAR最少航过数量估计方法

于龙龙 冯东 王建 黄晓涛*

(国防科技大学电子科学学院 长沙 410073)

摘要: 在层析SAR技术的实际应用中, 航过数量通常受高昂成本等因素的限制。互质层析SAR技术通过稀疏分布航过位置、延长基线孔径长度, 可以降低所需的航过数量。当采用子空间方法开展互质层析SAR重构处理时, 为了获得可靠的层析图, 研究最少航过数量估计问题。考虑到子空间方法的重构性能受多个参数的影响, 因此航过数量的选择必须综合考虑所有相关参数对重构结果的影响。为此, 通过样本特征值分析方式建立子空间方法的可靠性保证条件。根据这个可靠性保证条件, 提出了一种估计最少航过数量的方法。与传统的最少航过数量估计方法相比, 所提方法的优势在于: 同时考虑所有的相关参数, 且具有解析的数学描述式。最后, 仿真实验证实由所提方法估算的航过数量确实接近最小, 且能够保证重构结果可靠。

关键词: 层析合成孔径雷达; 互质阵列; 最少航过数量; 样本协方差矩阵的特征值; 散射点数量估计

中图分类号: TN957.52

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2022)04-0618-19

DOI: 10.12000/JR22047

引用格式: 于龙龙, 冯东, 王建, 等. 互质层析SAR最少航过数量估计方法[J]. 雷达学报, 2022, 11(4): 618–636. doi: 10.12000/JR22047.

Reference format: YU Longlong, FENG Dong, WANG Jian, *et al.* Estimation of the minimum number of acquisitions for coprime tomographic synthetic aperture radar[J]. *Journal of Radars*, 2022, 11(4): 618–636. doi: 10.12000/JR22047.

Estimation of the Minimum Number of Acquisitions for Coprime Tomographic Synthetic Aperture Radar

YU Longlong FENG Dong WANG Jian HUANG Xiaotao*

(College of Electronic Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In the practical application of Tomographic Synthetic Aperture Radar (TomoSAR), the number of acquisitions is usually restricted due to their expensive cost. A coprime TomoSAR technique was proposed to reduce the required number of acquisitions by sparsely distributing acquisitions and elongating baseline aperture. To guarantee a reliable tomogram, this study aims to determine the minimum number of acquisitions for the coprime TomoSAR when adopting a subspace method for performing the tomographic reconstruction. However, the performance of the subspace method depends on multiple parameters. In light of this, the selection of acquisition times has to comprehensively weigh the effects of all these parameters on the reconstruction performance. To this end, a prerequisite for reliable reconstruction is established by quantifying the relationship between the sample eigenvalues and all related parameters. Compared with conventional estimation approaches for the minimum number of acquisitions, the proposed approach has twofold advantages of containing all related parameters and of having a closed-form expression. Finally, the simulation experiments verify that the number of acquisitions estimated by our approach is close to the minimum and can guarantee reconstruction reliability.

Key words: Tomographic Synthetic Aperture Radar (TomoSAR); Coprime array; Minimum number of acquisitions; Eigenvalues of the sample covariance matrix; Scatterer detection

收稿日期: 2022-03-15; 改回日期: 2022-05-12; 网络出版: 2022-05-29

*通信作者: 黄晓涛 xthuang@nudt.edu.cn

*Corresponding Author: HUANG Xiaotao, xthuang@nudt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(62101562)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (62101562)

责任编辑: 仇晓兰 Corresponding Editor: QIU Xiaolan

1 引言

在对城市场景的观测应用中^[1], 层析合成孔径雷达技术(Tomographic Synthetic Aperture Radar, TomoSAR)^[2]具有巨大的应用价值。层析SAR通过多次航过、以不同的波束视角观测同一场景, 能够获取被观测场景的三维图像。在层析SAR的实际应用中, 航过数量的选择是一个重要的考量因素。因为航过数量的选择不仅取决于层析性能指标, 同时还要受到成本的制约。从节约成本方面考虑, 用户希望使用尽可能少的航过数量实现性能指标。

为了减少航过数量, 文献[3,4]提出了一种互质层析SAR技术。互质层析SAR的基线(指航过位置的分布结构)按照互质阵列几何^[5]构建。互质层析SAR可以应用在机载平台上, 因为机载平台的轨迹偏航量小。而偏航后的轨迹可以利用基线插值技术^[6]恢复到理想位置。文献[3]和文献[4]证实: 在层析性能相同的情况下, 互质层析SAR比均匀层析SAR(其航过位置均匀地分布)所需的航过数量少。互质层析SAR另一个优势是, 其航过位置可以根据解析公式计算得到。相比之下, 最小冗余阵列(Minimum Redundancy Arrays, MRA)几何不具有解析形式, 因而MRA层析SAR^[7,8]的航过位置必须通过计算机辅助搜索的方式确定。这种构建基线的方式往往比较耗时, 并且当航过数量较多时, 甚至不可行。

在实际应用中, 用户希望使用尽可能少的航过数量实现层析性能指标。但是, 一味地减少航过数量可能导致层析重构结果不可靠。为了将互质层析SAR技术推向实用, 本文研究了最少航过数量(Minimum Number of Acquisitions)估计问题。最少航过数量的选择不仅取决于层析性能指标, 而且与所采用的重构方法紧密相关。在采用Fourier重构方法^[2]的情况下, 根据分辨率(除非特别说明, 专指层析SAR的高度向分辨率)和模糊度指标可以轻松计算所需的最少航过数量。然而, Fourier方法的重构性能有限。考虑到城市场景的高度向回波信号具有稀疏性, 层析重构处理大多采用超分辨重构方法。这类方法作为一类基于观测数据的自适应方法, 其重构性能与多个参数有关, 包括航过数量、基线几何、航过间隔、散射点数量、散射点间的高度向位置间隔(高度间隔)、信噪比以及视数。因此, 在采用超分辨重构方法的情况下, 要准确分析具体性能所需的最少航过数量, 必须综合考虑所有相关参数对重构性能的影响。

针对最少航过数量估计问题, 研究人员开展过

多项研究工作。文献[9]针对子空间方法, 提出了一种通过简单的数值计算就可以估计最少航过数量的方法。但是该方法仅考虑了航过数量与分辨率之间的关系, 而其余的参数在最少航过数量分析过程中被忽视。文献[10]针对压缩感知方法, 仅分析了信噪比与最少航过数量之间的约束关系。这种方法必须借助计算机仿真才能应用, 所以该方法在实际应用中往往比较麻烦。此外, 文献[10]仅针对单视数据情况, 没有考虑多视数据对最少航过数量的影响。继文献[10]之后, Zhu等人^[11]将压缩感知方法拓展到了多视数据情况下, 并指出利用多视数据能够降低航过数量需求。但是, 他们并没有定量地分析视数对最少航过数量的影响。

在采用超分辨重构方法的情况下, 最少航过数量估计是一个复杂的多参数问题。然而, 传统的最少航过数量估计方法^[9,10]因为没有同时考虑所有相关参数对最少航过数量的影响, 所以无法准确响应参数变化。也就是说, 当参数变化有利于降低最少航过数量时(比如提高信噪比或者增加视数), 由传统方法估算的航过数量可能存在冗余; 相反, 当参数变化需要增加航过数量时(比如降低信噪比或者减少视数), 由传统方法估算得到的航过数量可能无法保证重构结果可靠。

针对子空间方法, 本文提出了一种估计最少航过数量的方法。与传统方法^[9,10]相比, 本文方法同时考虑了所有的相关参数, 且具有解析的数学描述式。由于兼顾了所有相关参数, 因此该方法能够灵活应对各种场景。也就是说, 该方法可以准确跟踪最少航过数量随相关参数的变化。因此, 由这种方法确定的航过数量在保证重构结果可靠的条件下接近最少。由于具有解析的形式, 该方法通过简单的数值计算就可以得到所需的最少航过数量。另外, 本文方法可以适用于任意基线几何的层析SAR, 包括互质层析SAR。相比之下, 文献[9]中所提出的方法没有考虑基线几何对航过数量的影响。

为了确保所选定的航过数量能够获得可靠的重构结果, 本文分析子空间方法的可靠重构的保证条件。根据这个保证条件建立了航过数量与其余影响重构性能参数之间的约束关系。考虑到子空间方法的重构性能直接依赖样本协方差矩阵的特征值(样本特征值), 而样本特征值与多个参数有关^[12,13]。这些参数包括航过数量、基线几何、航过间隔、散射点数量、高度间隔、信噪比以及视数。因此, 为了准确响应参数变化对子空间方法重构结果的影响, 我们通过定量地分析样本特征值与所有相关参数之间的关系, 定义了可靠重构的保证条件。根据

这个可靠性保证条件, 提出了一种估计最少航过数量的方法。仿真结果表明, 本文方法估算的航过数量确实接近最小, 且能够保证层析重构结果可靠。

2 互质层析SAR

文献[3,4]提出了互质层析SAR技术, 其航过位置按照互质阵列几何^[5]配置。本文将互质层析SAR的基线几何称为互质基线。图1为互质层析SAR的数据获取几何的示意图。图中 r_0 表示参考航过至位于高度位置 h 的散射点之间的最近斜距。 $R_m(r_0, h)$ 表示第 m 条航过至该散射点之间的斜距。

为了说明方便, 假定所有航过均沿垂直斜距(Normal-to-Slant-Range, NSR)方向排列。互质基线由两个间距不等、均匀且稀疏的子基线构成。假定两个子基线的起始航过位置重合, 互质基线的航过位置集合为 $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2$, 其中 $\mathbb{D}_1 = \{(m-1) \cdot M_2 d\}_{m=1}^{M_1}$ 和 $\mathbb{D}_2 = \{(m-1)M_1 d\}_{m=1}^{M_2}$ 分别表示第1个子基线和第2个子基线的航过位置集合; \cup 表示并集运算符; M_1 和 M_2 分别表示第1个子基线和第2个子基线的航过数量, 且被要求为一对互质整数; d 表示相邻航过间的最小间隔(最小航过间隔), 这个值的选择与成像几何参数和观测场景的模糊高度有关^[2,9]。可以看出, 互质基线相当于从均匀基线的位置集合 $\{0, 1, 2, \dots, (M_1-1)M_2\}d$ 中筛选出的一种非均匀、稀疏基线。由于具有非均匀和稀疏特性, 互质基线几何使用较少的航过数量就能获得与均匀基线几何相同的层析重构性能^[3,4]。

3 协方差矩阵的特征值特性

对于子空间方法而言, 层析重构性能直接依赖于样本特征值。这是因为, 散射点数量估计处理要

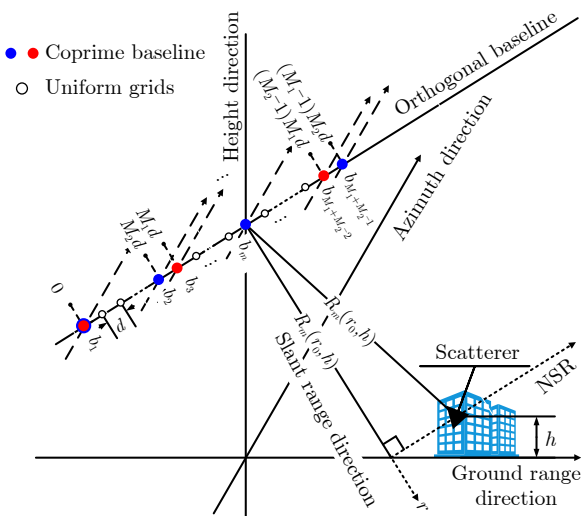


图 1 互质层析SAR的数据获取几何

Fig. 1 The acquisition geometry of the coprime TomoSAR

基于样本特征值开展^[14,15], 并且散射点的高度位置估计(高度估计)处理过程中的子空间划分也要依据样本特征值的大小开展。然而, 样本特征值与多个参数有关。这些参数为航过数量、基线几何、航过间隔、散射点数量、高度间隔、信噪比以及视数。因此, 在层析性能指标给定的情况下, 航过数量的选择要综合考虑所有相关参数的影响。这样才有可能使得所确定的航过数量在保证重构性能达标的条件下接近最少。

对于子空间方法而言, 准确估计散射点数量是保证重构结果可靠的首要条件。因此, 散射点数量估计的可靠性被选来作为评估重构结果是否可靠的标准。为了保证层析重构结果的可靠性, 本节通过定量地分析样本特征值与所有相关参数之间的关系, 定义了可靠重构的保证条件。根据这个保证条件建立了航过数量与相关参数之间的约束关系。基于这个约束关系, 可以解析地计算最少航过数量。

3.1 层析信号模型

在城市场景下, 层析信号可以看作少量几个点散射体的回波。当层析SAR获取的二维SAR图像经过良好的聚焦、相位校正和配准后, 同一个距离-方位分辨单元中的层析信号可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(L)] \\ \mathbf{y}(l) = \mathbf{A}\mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}(l) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(h_k) s_k + \boldsymbol{\eta}(l) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 表示观测数据, 是一个 $M \times L$ 维的复数矩阵; M 和 L 分别表示航过数量和视数, 其中多视数据可以通过多视处理^[16]或者非局部滤波处理^[17]获得; $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(h_1), \mathbf{a}(h_2), \dots, \mathbf{a}(h_K)] \in \mathbb{C}^{M \times K}$ 表示观测矩阵, 其中 $\mathbf{a}(h_k)$ 表示基线相对于第 k 个散射点的导向矢量, 而 h_k 表示这个散射点的高度位置; $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_K]^T$, 其中 s_k 表示第 k 个散射点的散射系数, 通常假定散射点的回波信号之间互不相关。 $(\cdot)^T$ 代表矩阵或者向量的转置运算符。 K 表示散射点数量; $\mathbf{a}(h_k)$ 的第 m 个元素为 $a_m(h_k) = \exp[j4\pi b_m d h_k / (\kappa r_0 \sin\theta)]$, 其中 b_m 表示第 m 条航过相对于参考航过的正交基线分量; κ 表示雷达波长; r_0 表示参考航过的斜距; $j = \sqrt{-1}$ 。 $\boldsymbol{\eta}(l)$ 表示第 l 视数据中的噪声信号, 通常被假定为一个独立同分布的高斯随机过程。

在城市场景下, 由于层析信号具有稀疏性, 所以层析重构处理被看作一个参数求逆问题, 即从观测数据 \mathbf{Y} 中估计散射点的数量 K 、各个散射点的高度位置 $\{h_k\}_{k=1}^K$ 和其散射点系数 $\{s_k\}_{k=1}^K$ 。由于子空间方法具有超分辨性能且运算量适中, 本文考虑采用子空间方法开展层析重构处理。对于子空间方法而

言, 重构结果的可靠性直接依赖样本特征值。然而, 样本特征值与多个参数有关。为此, 3.2节将定量分析样本特征值与所有相关参数之间的关系。

3.2 样本协方差矩阵的特征值特性

观测数据 \mathbf{Y} 的期望协方差矩阵被定义为

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^{\mathbf{H}}] \quad (2)$$

式中, $\mathbf{E}[\cdot]$ 表示期望运算符。 $(\cdot)^{\mathbf{H}}$ 代表矩阵或者矢量的共轭转置运算符。

在模型(1)的假设条件下, \mathbf{R} 有如下形式

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \text{diag}(s_1^2, s_2^2, \dots, s_K^2) \mathbf{A}^{\mathbf{H}} + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (3)$$

式中, $\text{diag}(s_1^2, s_2^2, \dots, s_K^2)$ 表示由元素 s_k^2 , $k = 1, 2, \dots, K$ 构造的 K 阶对角矩阵; σ^2 表示噪声的方差; \mathbf{I}_M 表示 M 阶的单位矩阵。

协方差矩阵的期望值仅具有理论上的意义, 在实际信号处理中通常用其估计值替代, 也就是样本协方差矩阵。样本协方差矩阵可以通过多个独立的样本计算得到

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^{\mathbf{H}} = \sum_{l=1}^L \mathbf{y}(l) \mathbf{y}(l)^{\mathbf{H}} \quad (4)$$

下面给出了矩阵 \mathbf{R} 和 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征值分解形式

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}^{\mathbf{H}} \\ \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathbf{H}} \end{cases} \quad (5)$$

式中, \mathbf{W} 表示由特征向量构成的矩阵; $\mathbf{A} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M)$, 其中 $\{\gamma_m\}$ 表示矩阵 \mathbf{R} 的特征值。同理, 矩阵 \mathbf{V} 和 $\mathbf{\Sigma}$ 分别包含 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征向量和特征值, 且 $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_M\}$, 其中 $\{\ell_m\}$ 表示矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征值。

假定期望协方差矩阵的特征值(期望特征值)和样本特征值均按照降序排列, 即 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_M$, $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_M$ 。 $\{\gamma_k\}_{k=1}^K$ 代表期望协方差矩阵的信号特征值(信号的期望特征值), 剩余的 $M-K$ 个特征值代表期望协方差矩阵的噪声特征值(噪声的期望特征值)且 $\gamma_{K+1} = \gamma_{K+2} = \dots = \gamma_M = \sigma^2$ 。同理, $\{\ell_k\}_{k=1}^K$ 表示样本协方差矩阵的信号特征值(信号的样本特征值), 而剩余的 $M-K$ 个特征值表示样本协方差矩阵的噪声特征值(噪声的样本特征值)。

对子空间方法而言, 重构结果的可靠性直接依赖样本特征值。这是因为散射点数量估计要基于样本特征值开展, 并且高度估计处理中的子空间划分也要依据样本特征值的大小实施。理论上, 信号的样本特征值应该大于噪声的样本特征值。这是因为信号的样本特征值中不仅包含信号自身的贡献, 同时也包含噪声的贡献。因此, 可以利用信号的样本特征值和噪声的样本特征值在幅度方面的差异性来

估计散射点的数量。在得到散射点数量的可靠估计值之后, 根据样本特征值的大小就能准确地划分信号子空间与噪声子空间。然而, 在实际中, 由于噪声信号的随机性, 信号的样本特征值有可能等于, 甚至小于噪声的样本特征值。在这种情况下, 信号的样本特征值与噪声的样本特征值不能分辨, 从而也就无法根据样本特征值可靠地估计散射点的数量。自然而然, 也就无法准确地得到信号子空间和噪声子空间, 进而导致高度估计值严重偏离真实值。

下面通过定量地分析样本特征值与所有相关参数之间的关系, 定义子空间方法的可靠重构的保证条件。

文献[12]针对航过数量和视数均有限的情况, 采用矩阵扰动理论(Matrix Perturbation)分析了样本特征值与相关参数之间的关系。文献[12]给出, 在下面条件满足的情况下

$$\gamma_S - 2C\sqrt{\frac{\sigma^2\gamma_S}{L}} > \sigma^2 \left[\left(1 + \sqrt{\frac{M}{L}}\right)^2 + \frac{M}{L} \right] \quad (6)$$

信号的样本特征值的下限以概率 $1 - \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 满足

$$\ell_S \geq \gamma_S - 2C\sqrt{\frac{\sigma^2\gamma_S}{L}} \quad (7)$$

文献[12]同时给出, 噪声的样本特征值的上限以概率 $1 - \varepsilon_1$ 满足

$$\ell_\sigma \leq \sigma^2 \left[\left(1 + \sqrt{\frac{M}{L}}\right)^2 + \frac{M}{L} \right] \quad (8)$$

在式(6)–式(8)中, γ_S 表示任意一个信号的期望特征值; ℓ_S 表示与 γ_S 对应的样本特征值。 σ^2 , M 和 L 分别表示噪声方差、航过数量、视数。 ε 是一个与自选常数 C 有关概率值, 且 $\varepsilon = \Pr[|N(0, 1)| > C]$, 其中 $\Pr[\cdot]$ 表示概率分布函数; $N(0, 1)$ 表示一个标准正态分布函数。 ε_1 和 ε_2 是与航过数量、视数等有关的概率值, 非常小。

从式(6)–式(8)可以看出, 在信号的期望特征值满足条件(6)的情况下, 对应信号的样本特征值大于噪声样本特征值的上限。基于这个结论, 让幅度最小的信号的样本特征值满足条件(6)就能够保证信号的样本特征值与噪声的样本特征值分开。

根据以上讨论, 将定义子空间方法的可靠性保证条件为

$$\mathcal{D} \triangleq \gamma_K - 2C\sqrt{\frac{\sigma^2\gamma_K}{L}} > \sigma^2 \left[\left(1 + \sqrt{\frac{M}{L}}\right)^2 + \frac{M}{L} \right] \quad (9)$$

式中, γ_K 表示矩阵 \mathbf{R} 的第 K 个特征值, 也就是信号

的期望特征值序列中的最小值。在实际的信号处理过程中,可以采用阈值检测方法,并将特征值阈值设定在 $\sigma^2[(1+\sqrt{M/L})^2+M/L]$,通过统计超过阈值的样本特征值数量估计散射点数量。根据以上的分析可知,条件(9)在理论意义上可以保证估计结果可靠。

从式(9)可以看出,可靠检测条件包含变量 γ_K 。实际上,信号的期望特征值 γ_K 的大小是变化的。针对散射点数量 $K=2$ 的情况,文献[13]给

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sigma^2 + \frac{1}{2}(s_1^2\|\mathbf{a}_1\|^2 + s_2^2\|\mathbf{a}_2\|^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(s_1^2\|\mathbf{a}_1\|^2 - s_2^2\|\mathbf{a}_2\|^2)^2 + 4s_1^2s_2^2|\langle\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle|^2} \\ \gamma_2 = \sigma^2 + \frac{1}{2}(s_1^2\|\mathbf{a}_1\|^2 + s_2^2\|\mathbf{a}_2\|^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(s_1^2\|\mathbf{a}_1\|^2 - s_2^2\|\mathbf{a}_2\|^2)^2 + 4s_1^2s_2^2|\langle\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle|^2} \end{cases} \quad (11)$$

式中, γ_1, γ_2 反映两个信号的期望特征值,而其余的特征值代表噪声的期望特征值且 $\gamma_3=\gamma_4=\dots=\gamma_M=\sigma^2$ 。从式(11)可以看出,影响信号的期望特征值的参数有噪声方差 σ^2 、散射点功率 s_k^2 、基线几何、航过间隔、航过数量 M 以及高度间隔。而基线几何、航过间隔以及高度间隔对信号的期望特征值的影响隐藏在导向矢量 \mathbf{a}_k 中。仔细分析可以发现, $\|\mathbf{a}_1\|^2=\|\mathbf{a}_2\|^2=M, \langle\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle = \mathbf{a}_2^H\mathbf{a}_1 \sum_{m=1}^M \exp[j4\pi b_m d(h_1 - h_2)]/(\kappa r_0 \sin\theta)$,其中 $h_1 - h_2$ 表示高度间隔; d 表示航过间隔; $\|\cdot\|$ 表示向量的2范数; $\langle\cdot\rangle$ 表示向量的内积运算符; $|\cdot|$ 表示求绝对值运算符。

将式(11)中的 γ_2 代入可靠检测条件(9),并用噪声方差 σ^2 对可靠检测条件进行归一化,则有如下形式

$$\begin{cases} \mathcal{D} \triangleq \bar{\gamma}_2 - 2C\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_2}{L}} > \left[\left(1 + \sqrt{\frac{M}{L}}\right)^2 + \frac{M}{L} \right] \\ \bar{\gamma}_2 = \frac{\gamma_2}{\sigma^2} = 1 + \frac{1}{2}(\text{SNR}_1\|\mathbf{a}_1\|^2 + \text{SNR}_2\|\mathbf{a}_2\|^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\text{SNR}_1\|\mathbf{a}_1\|^2 - \text{SNR}_2\|\mathbf{a}_2\|^2)^2 + 4\text{SNR}_1\text{SNR}_2|\langle\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle|^2} \end{cases} \quad (12)$$

式中, $\text{SNR}_1 = s_1^2/\sigma^2$ 和 $\text{SNR}_2 = s_2^2/\sigma^2$ 分别表示两个散射点的信噪比。

式(12)就是2个散射点情况下的可靠检测条件。可以看出,这个检测条件具有解析形式,其中的变量为基线几何、航过间隔、航过数量、散射点数量、高度间隔、信噪比以及视数。

文献[18]指出,在层析SAR场景中,同一个距离-方位分辨单元的散射点数量有可能且最多不超过3个,分别表示来自地面、建筑的外立面以及顶部的散射点。为了应对这种情况,本文针对 $K=3$,推导了信号的期望特征值与相关参数之间的解析关系式。具体推导过程见附录,这里只给出相应的结论。

对于信号模型(1),当观测场景中存在3个散射点时($K=3$),期望协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R} = s_1^2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^H + s_2^2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2^H + s_3^2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3^H + \sigma^2\mathbf{I}_M^2 \quad (13)$$

式中,为了简化,令 $\mathbf{a}_k=\mathbf{a}(h_k), k=1, 2, 3$ 。

对式(13)中的 \mathbf{R} 进行特征值分解可以得到信号的期望特征值的解析式,即

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sigma^2 - \frac{c_2}{3c_1} + \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \gamma_2 = \sigma^2 - \frac{c_2}{3c_1} + \omega^2\sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega\sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \gamma_3 = \sigma^2 - \frac{c_2}{3c_1} + \omega\sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega^2\sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{cases} \quad (14)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = -1 \\ c_2 = \gamma_1^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + \gamma_2^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + \gamma_3^2 \|\mathbf{a}_3\|^2 \\ c_3 = - \left(\gamma_1^2 \gamma_2^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2 + \gamma_1^2 \gamma_3^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2 \right) \\ \quad + \left(\gamma_1^2 \gamma_2^2 |\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle|^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 |\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle|^2 + \gamma_1^2 \gamma_3^2 |\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle|^2 \right) \\ c_4 = +\gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \left[\|\mathbf{a}_1\|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2 + 2\text{Re}(\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle) \right] \\ \quad - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \left(\|\mathbf{a}_1\|^2 |\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle|^2 + \|\mathbf{a}_2\|^2 |\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle|^2 + \|\mathbf{a}_3\|^2 |\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle|^2 \right) \\ p = \frac{3c_1 c_3 - c_2^2}{3c_1^2} \\ q = \frac{2c_2^3 - 9c_1 c_2 c_3 + 27c_1^2 c_4}{27c_1^3} \\ \omega = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \quad (15)$$

式中, $\text{Re}(\cdot)$ 表示复数的实部。

由于可靠检测条件(9)具有解析形式, 因此在给定条件下, 最少航过数量和子空间方法的分辨率极限通过简单的数值计算就可以得到。

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\min} = \arg \min_M \{M\} \\ \text{s.t.}: \gamma_K(M) - 2C \sqrt{\frac{\sigma^2 \gamma_K(M)}{L}} > \sigma^2 \left[\left(1 + \sqrt{\frac{M}{L}}\right)^2 + \frac{M}{L} \right] \\ \rho_h = \arg \min_{\Delta h = |h_k - h_l|, k \neq l} \{\Delta h\} \\ \text{s.t.}: \gamma_K(h_1, h_2, \dots, h_K) - 2C \sqrt{\frac{\sigma^2 \gamma_K(h_1, h_2, \dots, h_K)}{L}} > \sigma^2 \left[\left(1 + \sqrt{\frac{M}{L}}\right)^2 + \frac{M}{L} \right] \end{array} \right. \quad (16)$$

4 最少航过数量的估计方法

根据3.2节定义的可靠性保证条件[见式(9)], 本文提出一种估计最少航过数量估计方法, 其数学形式如下

$$(M_{\min}, d_M) = \underset{M, d}{\text{argmin}} \{M\}, \text{ s.t.}: \left\{ \begin{array}{l} \gamma_K(M, d) - 2C \sqrt{\frac{\sigma^2 \gamma_K(M, d)}{L}} > \sigma^2 \left[\left(1 + \sqrt{\frac{M}{L}}\right)^2 + \frac{M}{L} \right] \\ 0 \leq d \leq d_{\text{Nyq}} \end{array} \right. \quad (17)$$

式中, d 表示最小航过间隔; d_{Nyq} 表示满足奈奎斯特采样定律条件下 d 的上限值, 这个值与观测场景的模糊高度有关。在估计最少航过数量的过程中, 除 M 和 d 之外的其余参数(即基线几何、散射点数量、高度间隔、信噪比以及视数)可以根据具体情况设定。

对于任意给定的航过数量 M , 构成互质基线几何的整数对(即 M_1 和 M_2)可以通过如下方式获得。

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2 = \begin{cases} \frac{M}{2}, & M \text{ 偶数} \\ \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor, & M \text{ 为奇数且 } \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \text{ 为奇数} \\ \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor - 1, & M \text{ 为奇数且 } \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \text{ 为偶数} \end{cases} \\ M_1 = M - M_2 + 1 \end{array} \right. \quad (18)$$

式中, $\lfloor M/2 \rfloor$ 表示小于 $M/2$ 的最大整数。对于一个给定的 M , 构造方式(18)能够使得互质层析SAR的基线孔径最长, 进而使得重构性能最佳。

关于本文方法[见式(17)]在实际中的应用, 有几点需要说明。(1)航过数量 M 是一个离散的变量, 而 d 是一个连续变量。因此, 可能存在多个可行的 d 使得同一个最少航过数量满足可靠检测条件。在这种情况下, 建议选择其中最小的 d 。否则, 如果最小航过间隔固定在最大值 d_{Nyq} , 则由于航过数量的非连续变化, 导致所设计的层析SAR系统的性能与设计指标之间差异很大。(2)参数 C 虽然是一个由用户自选的参数, 但其大小会影响概率值 $\varepsilon = \text{Pr}[N(0, 1) > C]$, 进而影响样本特征值检测的可靠性。设定为 $C=3$ 。这是因为概率 $\text{Pr}[N(0, 1) > 3]$

$< 1 - 0.997$ 足够小, 意味着基于样本特征值的信号检测结果足够可靠。

图2给出了本文提出的最少航过数量估计方法的流程图。

步骤1 初始化参数。设定基线几何、成像几何参数、观测场景的相关参数、视数 L 、分辨率指标 ρ_h 以及航过数量的初始值 M_0 。成像几何参数包括雷达波长 κ 、斜距 r_0 、波束视角 θ 。观测场景的参数包括散射点数 K 、信噪比以及模糊高度。成像几何参数和观测场景的参数是构造观测矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(h_1), \mathbf{a}(h_2), \dots, \mathbf{a}(h_K)]$ 的必要参数, 并且最小航过间隔的上限值 d_{Nyq} 需要根据成像几何参数和模糊高度计算得出。

步骤2 固定航过数量 $M = M_0$, 在 $d \in (0, d_{Nyq}]$ 整个范围内计算信号的期望特征值 $\gamma_K(d)$, 并判断可靠检测条件是否满足。如果可靠检测条件满足, 则此时的航过数量就是最少航过数量, 即 $M_{\min} = M_0$ 。否则, 更新 $M_0 = M_0 + 1$ 后, 继续执行步骤2。在计算 $\gamma_K(d)$ 的过程中, 分辨率指标就是两个距离最近散射点的高度间隔, 即 $\min_{k \neq g} |h_k - h_g| = \rho_h$ 。

步骤3 计算满足可靠检测条件的最小航过间隔的最低值 d_M 。得到最少航过数量 M_{\min} 的确切值

之后, 在保证可靠检测条件满足的情况下, 搜索最小航过间隔的最低值。

在确定最少航过数量和最小航过间隔之后, 根据基线几何就可以确定层析SAR的基线构型。

5 仿真实验结果

通过仿真实验验证了本文方法的可靠性和有效性。可靠性是指航过数量的估计值能否保证子空间方法的重构结果达到性能指标; 有效性是指航过数量的估计值在保证重构结果可靠性的条件下能否接近最少。为此, 开展以下5项实验内容。

(1) 通过比较最少航过数量的实测值和其理论值, 分析本文方法[见式(17)]的可靠性。其中, 最少航过数量的实测值根据仿真实验通过测量得到, 而最少航过数量的理论值由本文方法通过数值计算得到。结果表明: 对于任意给定的实验条件, 最少航过数量的实测值总是小于其理论值。这说明: 由本文方法所估算的航过数量能保证重构结果可靠。

(2) 利用子空间方法中特有的“性能崩塌(Performance Breakdown)”现象^[19,20], 分析本文方法的有效性。对子空间方法而言, 当信号的样本特征值和噪声的样本特征值在大小上比较接近时, 高度

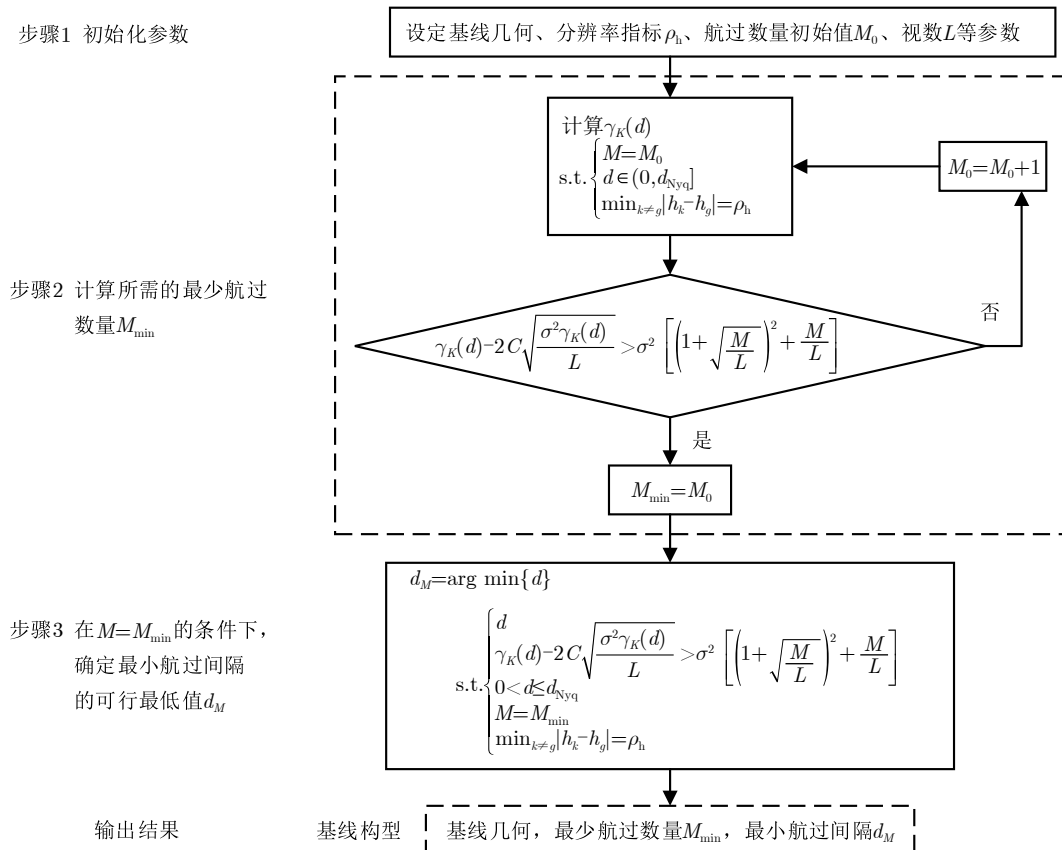


图 2 本文提出的最少航过数量估计方法的流程图

Fig. 2 The flow chart for the propose approach to estimate the minimum number of acquisitions

估计结果会发生“性能崩塌”现象。这种现象意味着，相应的参数条件已经濒临子空间方法性能崩塌的边缘。仿真实验结果表明：由本文方法选定的航过数量接近可靠重构的极限条件。

(3) 进一步，通过改变散射点数量、视数和信噪比等参数，分析本文方法准确跟踪参数变化的能力。实验结果表明，本文方法能够有效跟踪由参数变化导致的最少航过数量的需求变化。

(4) 比较本文方法与传统方法。结果表明，当参数变化有利于降低最少航过数量，由本文方法估计的航过数量比由传统方法估计的少。相反，当参数变化需要增加航过数量时，本文方法能够准确跟踪这种变化，从而保证重构结果可靠。而传统的方法由于没有考虑参数变化对最少航过数量的影响，因而由这些方法估计的航过数量不足，以致无法保证重构结果可靠。

(5) 分析基线偏差对层析性能的影响。在实际数据获取过程中，由于气流扰动的影响，机载平台的实际航迹会偏离预先规划的航迹位置，导致出现基线偏差。通过仿真实验比较了理想情况下和存在基线偏差情况下的层析性能。实验结果表明，当基线偏差处于合理范围内时，存在基线偏差情况下的层析性能与对应理想情况下的层析性能接近。这说明本文提出的最少航过数量估计方法能够有效地应用于实际。

在仿真实验过程中，以正确检测概率作为散射点数量估计性能的测量指标。正确检测概率被定义为散射点数量估计正确的次数占总实验次数的比例。在实测过程中，笔者认为可靠估计是正确检测概率达到100%的状态。测量结果通过计算一万次独立实验的平均值得到。散射点数量的估计方法采用阈值检测方法，而检测阈值被设定为噪声的样本特征值的上限 $\sigma^2[(1+\sqrt{c})^2+c]$ ，其中 σ^2 表示噪声方差； $c=M/L$ 。在基线理想情况下，采用求根-多重信号分类(Root-Multiple Signal Classification, Root-MUSIC)算法^[21]估计散射点的高度位置；当存在基线偏差时，采用频域Root-MUSIC (Fourier-Domain Root-MUSIC, FD Root-MUSIC)算法^[22]估计散射点的高度位置。采用均方根误差(Root Mean Squared Error, RMSE)评价高度估计精度。高度估计的均方根误差被定义为 $RMSE(\mathbf{h}) = \sqrt{\sum_{q=1}^Q \|\hat{\mathbf{h}}(q) - \mathbf{h}\|^2 / (KQ)}$ ，其中， $\mathbf{h}=[h_1, h_2, \dots, h_K]^T$ ， $\hat{\mathbf{h}}(q) = [\hat{h}_1(q), \hat{h}_2(q), \dots, \hat{h}_K(q)]^T$ ； $\hat{h}_k(q)$ 表示第 q 次正确检测实验中 h_k 的估计值； h_k 表示第 k 个散射点的真实高度位置。 K 和 Q 分别表示散射点数量和散射点数量估计正确的次数。

仿真实验所采用的层析SAR系统参数如下：雷达系统的中心频率为10 GHz。假定所有的航过都分布在相同高度位置10 km，参考航过距观测场景的距离 $r_0=18$ km。假定观测场景的模糊高度为30 m，根据奈奎斯特采样定律，航过间的最小间距 d 不能超过7.5 m。

5.1 最少航过数量估计方法的可靠性

实验首先比较最少航过数量的理论估计值和测量估计值。其中，理论估计值由式(17)计算得出；而测量估计就是实测的检测概率达到100%时所需的最少航过数量。

假定观测场景中有2个功率不相等的散射点，信噪比分别为 $SNR_1 = s_1^2/\sigma^2 = 0$ dB和 $SNR_2 = s_2^2/\sigma^2 = 10$ dB。噪声为高斯白噪声。两个散射点的高度位置分别为 $h_1 = -\Delta h/2$ ， $h_2 = \Delta h/2$ ，其中 Δh 表示高度间隔。高度间隔被固定在1 m。仿真实验共考虑3种视数情况，分别 $L=10, 20$ 和 50 。

对于每一种视数情况，按照式(17)计算所需的最少航过数量和最小航过间隔。计算结果如表1所示。从表1可以看出，对于不同的实验条件，最少航过数量和最小航过间隔均存在差异。为了保证最少航过数量的理论估计值与其实测估计值的比较在相同条件下开展，在生成仿真数据的过程中，对于每一种情况将最小航过间隔设定在由表1给出的相应值。

图3给出了正确检测概率随航过数量的变化曲线。从图3可以看出，相比于均匀层析SAR，互质层析SAR的正确检测概率达到100%所需的最少航过数量更少。根据检测结果，我们计算了最少航过数量的实测估计值，即正确检测概率达到100%时所需的最少航过数量。表2对比了最少航过数量的理论估计值和实测估计值。通过对比，可以发现：在同等条件下，最少航过数量的理论估计值均比其实测估计值大。这说明，由本文方法(17)估算的最少航过数量能够保证在相应条件下获得可靠检测结果。

图4给出了高度估计的RMSE随航过数量的变

表 1 由本文方法计算得到的最少航过数量和最小航过间隔($K=2$;
 $SNR_1=0$ dB, $SNR_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

Tab. 1 The minimum number of acquisitions and the minimum inter-acquisition spacing calculated by the proposed approach ($K=2$; $SNR_1=0$ dB, $SNR_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

| 视数 | 均匀层析SAR | 互质层析SAR |
|--------|-----------------------------|-----------------------------|
| $L=10$ | $M_{\min}=20$; $d_M=7.0$ m | $M_{\min}=13$; $d_M=4.6$ m |
| $L=20$ | $M_{\min}=15$; $d_M=7.3$ m | $M_{\min}=9$; $d_M=7.3$ m |
| $L=50$ | $M_{\min}=12$; $d_M=7.0$ m | $M_{\min}=8$; $d_M=5.5$ m |

化曲线。从图4可以看出,当航过数量增加时,高度位置估计的RMSE均接近各自的克拉默-拉奥界

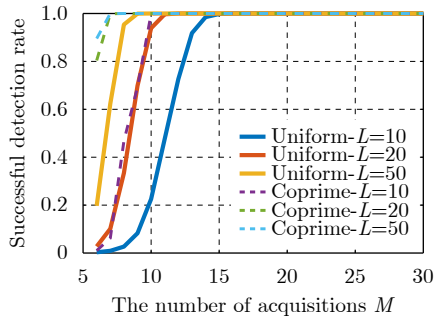


图 3 基于样本特征值检测方法的正确检测概率随航过数量的变化曲线($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

Fig. 3 Successful detection rate varies with the number of acquisitions ($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

表 2 基于样本特征值检测方法所需的最少航过数量的理论估计值和实测估计值($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

Tab. 2 The theoretical estimate and the measured estimate of the minimum number of acquisitions in the sense of the sample-eigenvalue-based detection ($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

| 视数 | 均匀层析SAR | | 互质层析SAR | |
|--------|---------|-----|---------|-----|
| | 理论值 | 实测值 | 理论值 | 实测值 |
| $L=10$ | 20 | 16 | 13 | 11 |
| $L=20$ | 15 | 13 | 9 | 8 |
| $L=50$ | 12 | 10 | 8 | 7 |

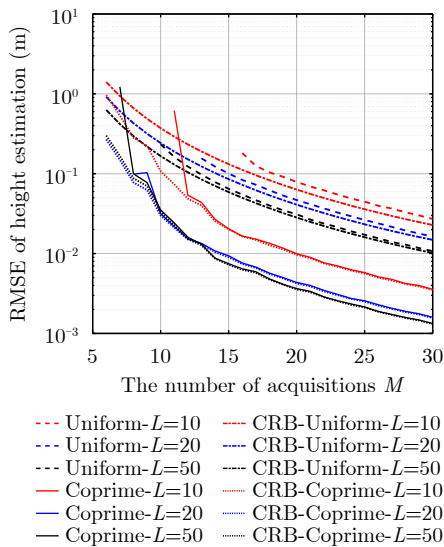


图 4 高度估计的RMSE随航过数量的变化($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

Fig. 4 The RMSE of the height estimation varies with the number of acquisitions ($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\Delta h=1$ m)

限(Cramer-Rao Bound, CRB)^[23]。此外,比较可以发现,在航过数量和视数相同的条件下,互质层析SAR在高度估计精度方面优于均匀层析SAR。这得益于互质基线几何的稀疏采样特性。相比于均匀层析SAR,互质基线在基线几何方面的优势能够有效延长基线孔径,进而提高高度估计精度。

下面分析由本文方法所设计的层析SAR系统的实测分辨率。其中,基线结构参数如表1所示,其余的参数(包括散射点数量、信噪比以及视数)与本节最小航过数量分析实验中的参数相等。这里分析正确检测概率随高度间隔 Δh 的变化,其中 Δh 的变化范围为0.1~2.0 m。

图5给出了正确检测概率随高度间隔的变化曲线。根据图5的正确检测概率,实际测量了基于样本特征值的信号检测方法的分辨率。分辨率的实测值被定义为正确检测率达到100%状态的最小的高度间隔。表3给出了基于样本特征值信号检测方法的实测分辨率。通过与相同条件下的瑞利分辨率

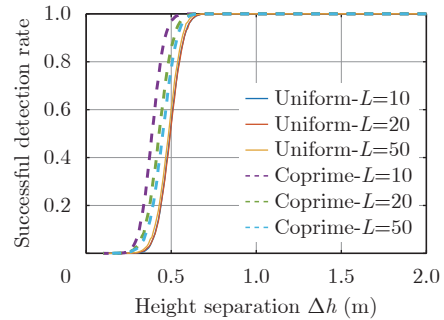


图 5 基于样本特征值的信号检测方法的正确检测概率随高度间隔的变化曲线($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\rho_h=1$ m)

Fig. 5 Successful detection rate varies with the height separation ($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\rho_h=1$ m)

表 3 基于样本特征值检测方法的实测分辨率($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\rho_h=1$ m)

Tab. 3 The measured tomographic resolution of the sample-eigenvalue-based detection ($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\rho_h=1$ m)

| 实验参数 | 分辨的实测值(m) | 瑞利分辨率(m) |
|---|-----------|----------|
| $L=10$; 均匀层析SAR ($M_{\min}=20$; $d_M=7.0$ m) | 0.73 | 1.69 |
| $L=10$; 互质层析SAR ($M_{\min}=13$; $d_M=4.6$ m) | 0.64 | 1.22 |
| $L=20$; 均匀层析SAR ($M_{\min}=15$; $d_M=7.3$ m) | 0.73 | 2.19 |
| $L=20$; 互质层析SAR ($M_{\min}=9$; $d_M=7.3$ m) | 0.69 | 1.71 |
| $L=50$; 均匀层析SAR ($M_{\min}=12$; $d_M=7.0$ m) | 0.70 | 2.91 |
| $L=50$; 互质层析SAR ($M_{\min}=8$; $d_M=5.5$ m) | 0.69 | 2.55 |

比较,可以发现基于样本特征值的信号检测方法具有超分辨率性能。其中,瑞利分辨率被定义为 $\rho_R = \kappa r_0 \cdot \sin\theta / (2B)$, B 表示基线孔径长度的正交分量。通过比较基于样本特征值检测方法的分辨率的理论值($\rho_h = 1$ m)和相应的实测值,可以发现:分辨率的实测值接近并且全部小于相应的理论值。这说明,由本文方法确定的最少航过数量能够保证层析重构性能达标。

图6给出了高度估计的RMSE随高度间隔的变化曲线。从图6可以看出,当散射点之间的高度间隔足够大时,高度估计的RMSE与其CRB趋于一致。但是,当散射点之间距离较近时,高度估计的RMSE严重偏离了CRB。这是因为在这部分区域,虽然散射点数量的估计值正确,但是由于信号子空间和噪声子空间发生交换,因此散射点的高度位置估计值严重偏离了其真实值。最终,造成高度估计的RMSE严重偏离了CRB。这种现象是子空间方法特有的现象,称作“性能崩塌”。5.2节将会分析这种现象及其原因。令人意外的是,当分辨间隔足够高时,高度估计的RMSE的最低值出现在视数 $L=10$ 的互质层析SAR的情况中。但是通过仔细分析不难发现,这个情况中的基线孔径最长,是188 m。随后,依次是133 m (Uniform- $L=10$), 131 m (Coprime- $L=20$), 102 m (Uniform- $L=20$), 88 m (Coprime- $L=50$), 77 m (Uniform- $L=50$)。这个顺序基本与高度估计精度排序一致。同时可以发现,当高度间隔大于设计指标($\rho_h = 1$ m)时,由本

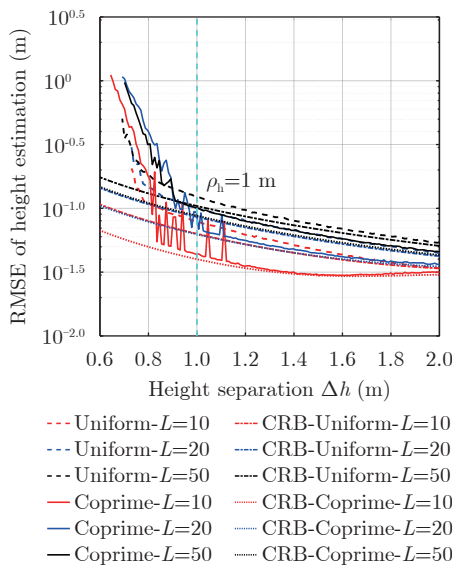


图6 高度估计的RMSE随高度间隔的变化曲线 ($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\rho_h=1$ m)

Fig. 6 The RMSE of the height estimation varies with the height separation ($K=2$; $\text{SNR}_1=0$ dB, $\text{SNR}_2=10$ dB; $\rho_h=1$ m)

文方法确定的航过数量能够保证高度估计结果可靠。虽然,互质层析SAR的部分高度估计结果出现异常,但是整体的高度估计误差小于0.1 m,这种估计精度能够满足实用需求。

5.2 散射点数量对层析重构性能的影响

实验分析散射点数量对最少航过数量和高度估计精度的影响。仿真实验分别在 $K=2$ 和 $K=3$ 的条件下开展。为了消除散射点数量不同可能引起的信噪比差异,所有散射点的功率被固定在相同值(即 $\text{SNR}=0$)。噪声为高斯白噪声。对于散射点数量 $K=2$ 的情况,散射点的高度位置分别为 $h_1=-\Delta h/2$, $h_2=\Delta h/2$;对于散射点数量 $K=3$ 的情况,散射点的高度位置分别为 $h_1=-\Delta h$, $h_2=0$, $h_3=\Delta h$ 。高度间隔 Δh 被固定在1 m。视数被固定在 $L=20$ 。

对于每一种仿真情况,根据本文方法计算所需的最少航过数量和最小航过间隔。计算结果如表4所示。和上一节实验中的做法一样,在生成仿真数据的过程中,对于每一种仿真情况将最小航过间隔设定在由表4给出的相应值。

图7给出了正确检测概率随航过数量的变化。根据图7的结果,计算了每种情况下的最少航过数量的实测估计值,并将结果列在表5中。从表5可以看出,散射点数量的增加确实会导致最少航过数量的增加。此外,还可以看出,在各种条件下,最少航过数量的理论值均大于其实测值。这说明,由

表4 本文方法计算所得的最少航过数量和最小航过间隔($\Delta h=1$ m; $L=20$; 所有散射点信噪比均等于0 dB)

| 散射点数量 | 均匀层析SAR | 互质层析SAR |
|-------|-----------------------------|-----------------------------|
| $K=2$ | $M_{\min}=18$; $d_M=7.4$ m | $M_{\min}=10$; $d_M=6.1$ m |
| $K=3$ | $M_{\min}=23$; $d_M=7.2$ m | $M_{\min}=10$; $d_M=7.1$ m |

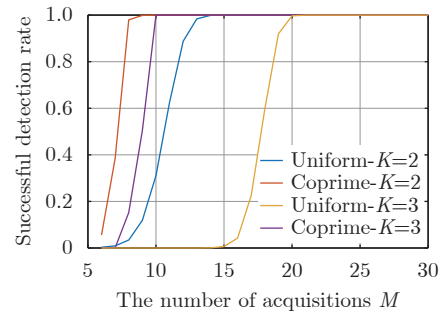


图7 基于样本特征值检测方法的正确检测概率随航过数量的变化曲线($\Delta h=1$ m; $L=20$; 所有散射点信噪比均等于0 dB)

Fig. 7 Successful detection rate varies with the number of acquisitions ($\Delta h=1$ m; $L=20$; all the SNRs=0 dB)

本文方法估算的最少航过数量能够保证检测结果可靠。

图8给出了高度位置估计的RMSE随航过数量的变化。可以看出,随着航过数量的增加,高度估计的RMSE均接近各自的CRB。这表明,Root-MUSIC算法在信号子空间与噪声子空间能够可靠分离的条件下可以获得一致估计。此外,在仿真条件相同且高度估计精度相同的条件下,互质层析SAR比均匀层析SAR所需的航过数量少。这个结果从高度估计方面说明,互质层析SAR能够降低航过数量需求。

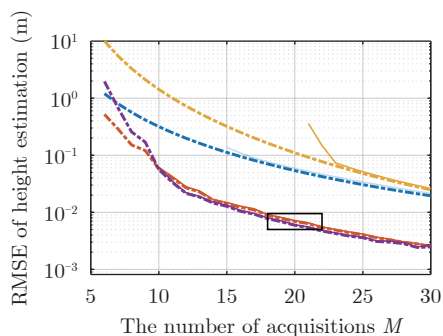
下面分析散射点数量对分辨率和高度估计误差的影响,并比较分辨率的理论值和其实测值。将理论分辨率固定在 $\rho_h=1$ m,根据本文方法计算相应条件下的最少航过数量和最小航过间隔。分辨率的实测值是根据相应的检测结果通过测量得到。

在仿真实验中,基线结构参数如表4所示,其余的参数(包括散射点数量、信噪比以及视数)与5.2节最少航过数量分析实验中的参数相等。对于

表 5 基于样本特征值检测方法所需的最少航过数量的理论估计值和实测估计值($\Delta h=1$ m; $L=20$; 所有散射点信噪比均等于0 dB)

Tab. 5 The theoretical estimate and the measured estimate of the minimum number of acquisitions in the sense of the sample-eigenvalue-based detection ($\Delta h=1$ m; $L=20$; all the SNRs=0 dB)

| 视数 | 均匀层析SAR | | 互质层析SAR | |
|-------|---------|-----|---------|-----|
| | 理论值 | 实测值 | 理论值 | 实测值 |
| $K=2$ | 18 | 15 | 10 | 10 |
| $K=3$ | 23 | 21 | 10 | 10 |

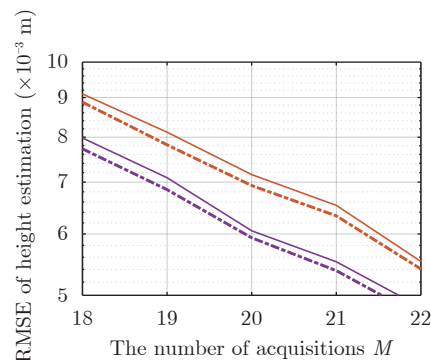


(a) 整体图
(a) The global view

每一种情况,计算正确检测概率随高度间隔 Δh 的变化,其中 Δh 的变化范围为0.1~2.0 m。

图9给出了正确检测概率随高度间隔的变化。根据图9的正确检测概率,测量了基于样本特征值的信号检测方法的分辨率。表6给出了每种情况下,基于样本特征值的信号检测方法的实测分辨率。通过比较分辨率理论值($\rho_h=1$ m)和对应的实测值,可以发现:分辨率的实测值均接近且小于相应的理论值。这说明,在给定条件下由本文方法确定的最少航过数量能够保证检测结果可靠。进而说明,本文方法能够适用于更广泛的情况。

图10给出了高度估计的RMSE随高度间隔的变化。可以看出,随着高度间隔的增加,高度估计的RMSE均接近各自的CRB。但是,当高度间隔比较小的时候,高度估计的RMSE会突然增加。这种现象被称作“性能崩塌”^[19,20],是子空间方法的特有现象。造成这种现象的原因是:当子空间方法的性能濒临崩塌的边缘时(此时,信号的样本特征值与噪声的样本特征值在幅度基本接近),虽然散射点数量能够得到正确估计,但是由于发生子空间交换(Subspace Swap)或者子空间泄露(Subspace Leakage),高度估计结果严重偏离真实值。这种现象恰好说明:本文定义的可靠检测条件[见式(9)]接近基于样本特征值的信号检测的极限;进而说明,由本文方法估算的航过数量确实接近最小。同时可以发现,当高度间隔大于设计指标($\rho_h=1$ m)时,由本文方法估算的航过数量能够保证高度估计结果可靠。此外,通过对比均匀层析SAR和互质层析SAR,可以发现:在达到指定的高度估计精度的情况下,互质层析SAR比均匀层析SAR所需的航过数量少。



(b) 图(a)中黑色矩形区域放大效果
(b) The enlarged image of the black rectangle in Fig. (a)

图 8 高度估计的RMSE随航过数量的变化曲线($\Delta h=1$ m; $L=20$; 所有散射点信噪比均等于0 dB)

Fig. 8 The RMSE of the height estimation varies with the number of acquisitions ($\Delta h=1$ m; $L=20$; all the SNRs=0 dB)

5.3 信噪比对最少航过数量的影响

考虑到航过数量是一个离散的变量, 而信噪比是一个连续的变量, 因此采用文献[10]中的做法, 通过分析信噪比与航过数量之间的约束关系, 来分析信噪比对最少航过数量的影响。从式(9)和式(12)可以看出, 在达到可靠检测条件下, 航过数量与信

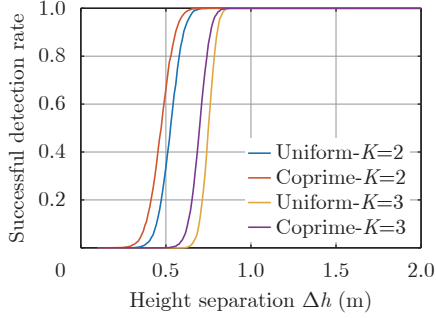


图 9 基于样本特征值检测方法的正确检测概率随高度间隔的变化曲线($L=20$; 所有散射点信噪比均等于0 dB; $\rho_h=1$ m)

Fig. 9 Successful detection rate varies with the height separation ($L=20$; all the SNRs=0 dB; $\rho_h=1$ m)

表 6 基于样本特征值检测方法的实测分辨率($L=20$; 所有散射点信噪比均等于0 dB; $\rho_h=1$ m)

Tab. 6 The measured tomographic resolution of the sample-eigenvalue-based detection ($L=20$; all the SNRs=0 dB; $\rho_h=1$ m)

| 实验参数 | 分辨的实测值 (m) | 瑞利分辨率 (m) |
|---|---------------|--------------|
| $K=2$; 均匀层析SAR ($M_{\min}=18$; $d_M=7.4$ m) | 0.75 | 1.78 |
| $K=2$; 互质层析SAR ($M_{\min}=10$; $d_M=6.1$ m) | 0.72 | 1.47 |
| $K=3$; 均匀层析SAR ($M_{\min}=23$; $d_M=7.2$ m) | 0.90 | 1.42 |
| $K=3$; 互质层析SAR ($M_{\min}=10$; $d_M=7.1$ m) | 0.88 | 1.26 |

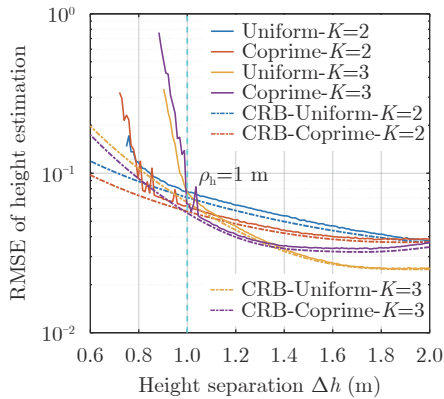


图 10 高度估计的RMSE随高度间隔的变化曲线($L=20$; 所有散射点信噪比均等于0 dB; $\rho_h=1$ m)

Fig. 10 The RMSE of the height estimation varies with the height separation ($L=20$; all the SNRs=0 dB; $\rho_h=1$ m)

噪比之间是存在约束关系的。为了定量描述这种约束关系, 固定航过数量, 转而计算满足可靠检测条件的最小信噪比。

在理论计算和生成仿真数据的过程中, 最少航过间隔 d 被固定为7.5 m。仿真数据包含2个功率相等的散射点。两个散射点的高度位置分别为 $h_1=-\Delta h/2$, $h_2=\Delta h/2$ 。高度间隔 Δh 被固定在1 m; 视数 $L=10$ 。

最少航过数量与信噪比之间的约束关系如图11所示。其中, 约束关系的理论值是在航过数量给定条件下, 由式(9)通过计算满足可靠检测条件的最小信噪比得到; 约束关系的实测值是通过测量正确重构概率达到100%时的最少航过数量得到。通过比较约束关系的理论值和实测值可以发现, 两者的变化趋势一致。这说明, 本文定义的可靠检测条件能够有效跟踪最少航过数量随信噪比的变化。此外, 通过比较可以发现, 对于任意的信噪比, 最少航过数量的理论值大于实测值。这说明, 本文定义的理论检测条件能够保证实际检测结果可靠。通过比较均匀层析SAR和互质层析SAR的最少航过数量可以发现: 当信噪比较高时, 互质层析SAR有助于降低最少航过数量。但是, 当信噪比较低时, 互质层析SAR在降低最少航过数量方面的优势基本消失了。优势消失的原因可以通过分析可靠检测条件看出。当散射点数量 $K=2$ 时, 式(12)给出了可靠检测条件。从式(12)可以看出, 基线几何对信号的期望特征值的影响反映在导向矢量 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 中, 且 $\|\mathbf{a}_1\|^2=\|\mathbf{a}_2\|^2=M$ 。因此, 当互质层析SAR和均匀层析SAR的航过数量相等时, 两者信号的期望特征值的差异仅体现在 $|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle|^2$ 。图12显示了 $|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle|/M$ 随航过数量的变化。对比图11和图12可以发现, 两者的随航过数量的变化趋势基本一致。

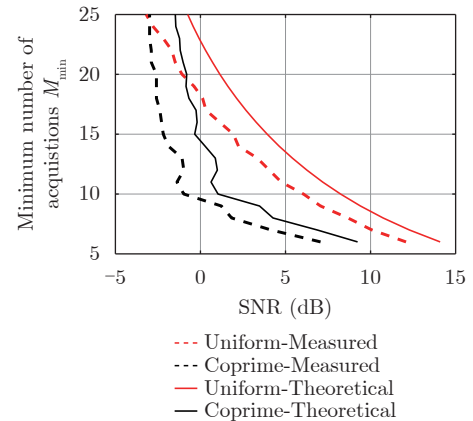


图 11 最少航过数量与信噪比之间的约束关系 ($K=2$; $\Delta h=1$ m; $L=10$)

Fig. 11 The constraint relationship between the minimum number of acquisitions and the SNR ($K=2$; $\Delta h=1$ m; $L=10$)

图13(a)和图13(b)分别给出了均匀层析SAR和互质层析SAR的高度估计RMSE随航过数量和信噪比的相变图(Phase Transition)。比较可以看出,在航过数量和信噪比相等的条件下,互质层析SAR获得的高度估计精度优于均匀层析SAR的。这源于互质层析SAR具有较长的基线孔径。同时,可以看出,当航过数量较低时,高度估计误差较大且严重偏离相应的CRB。造成这种问题的原因有两部分。一是,当航过数量较低时,高度估计误差本应该就比较(就高度估计的CRB而言)。但是更重要的原因在于,当航过数量较低时,子空间方法容易发生“性能崩塌”现象,导致高度估计的部分结果严重偏离真实值,最终造成整体的高度估计RMSE出现急剧增大的现象。图13中红色曲线描述了由式(9)计算得到的最少航过数量与信噪比之间的约束关系。通过分析高度估计的RMSE可以发现,当航过数量或者信噪比超过其理论最小值时(即红色曲线右上侧区域),高度估计结果能够有效避免“性能崩塌”问题。这说明,本文方法能够有效跟踪参数变化对最少航过数量的影响,从而使得所选定的航过数量能够保证高度估计结果可靠。

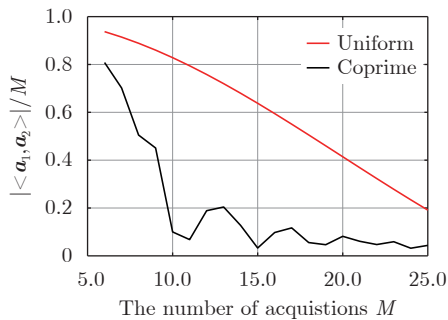


图 12 $|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle|/M$ 随航过数量的变化 ($d=7.5$ m; $K=2$; $\Delta h=1$ m)

Fig. 12 $|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle|/M$ varies with the number of acquisitions ($d=7.5$ m; $K=2$; $\Delta h=1$ m)

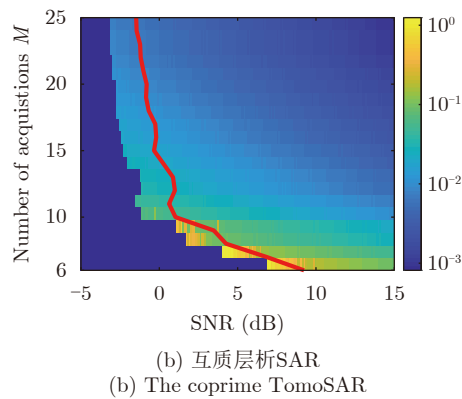
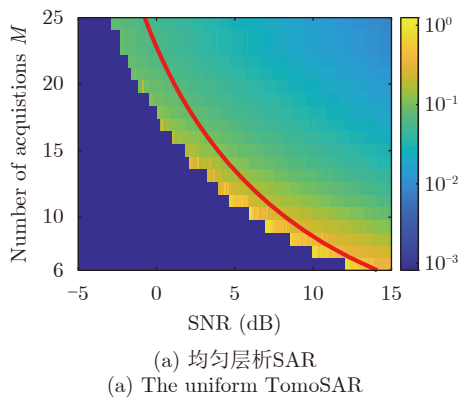


图 13 高度估计RMSE随航过数量和信噪比的相变图($K=2$; $\Delta h=1$ m; $L=10$)

Fig. 13 The phase transition of the RMSE as a function of the number of acquisitions and the SNR ($K=2$; $\Delta h=1$ m; $L=10$)

5.4 与传统方法比较

在最少航过数量估计的可靠性和有效性两方面比较本文方法与传统方法。在比较过程中,仅考虑文献[9]中的方法。因为本文方法和文献[9]方法都是针对子空间的方法,而文献[10]是针对压缩感知方法。此外,本文方法和方法[9]都是针对多视数据情况,而文献[10]是针对单视情况。考虑到适用条件上的差异,在对比实验中没有分析文献[10]中的方法。

文献[9]针对体散射目标(森林场景)和均匀层析SAR,利用椭球波函数(Prolate Spheroidal Wave Functions)定义了样本协方差矩阵的有效秩(Effective Rank),并在此基础上提出了最少航过数量估计方法。因为考虑的是均匀层析SAR,因此文献[9]通过估计航过数量和基线孔径长度就可以确定基线结构。在文献[9]中,有效秩 M_{efs} 、最少航过数量 M_{min} 以及基线孔径长度 B 被定义为

$$\begin{cases} M_{\text{efs}} = \left\lceil \frac{4\Delta_{\text{max}}}{\kappa} B \right\rceil \\ M_{\text{min}} = M_{\text{efs}} + M_{\text{com}} \\ B = \frac{\kappa}{4\Delta_{\text{min}}} \end{cases} \quad (19)$$

式中, κ 表示雷达波长; Δ_{max} 和 Δ_{min} 分别表示体散射目标在NSR方向上的最大扩散角(Angular Dispersion)和最小扩散角。 M_{com} 是一个大于1的整数,因此 M_{min} 大于 M_{efs} 。根据文献[9]的方法, M_{com} 的选择要求使得样本特征值的最小值与最大值之间的比值足够小。本文 M_{com} 被固定为1,因而 $M_{\text{min}} = M_{\text{efs}} + 1$ 。因为本文考虑的是视数和航过数量均有限的情况。在这种情况下, $M_{\text{com}}=1$ 总是能够保证选定的最少航过数量达到文献[9]的要求。 $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整数操作。

根据文献[9]中的定义, Δ_{max} 和 Δ_{min} 与模糊高度 H_{amb} 和分辨率 ρ_h 之间满足如下关系。

$$\begin{cases} \Delta_{\max} = \frac{H_{\text{amb}}}{2r_0 \sin \theta} \\ \Delta_{\min} = \frac{\rho_h}{r_0 \sin \theta} \end{cases} \quad (20)$$

式中, H_{amb} , r_0 , θ 和 ρ_h 分别表示模糊高度、最近斜距、波束视角、分辨率指标。

联立式(19)和式(20)可得, 有效秩 $M_{\text{efs}} = \lceil \Delta_{\max} / \Delta_{\min} \rceil = \lceil H_{\text{amb}} / (2\rho_h) \rceil$ 。由此可以看出, 根据文献[9]的方法, 航过数量的选择仅与模糊高度 H_{amb} 和分辨率 ρ_h 有关系, 而其他的参数(包括基线几何、视数、散射点数量以及信噪比)则在计算过程中被忽视。

本次实验所采用的参数与5.3节中的参数完全一样。其中, 分辨率和模糊高度分别为 $\rho_h = 1$ m和 $H_{\text{amb}} = 30$ m。在这种参数条件下, 由文献[9]方法估算得到的最少航过数量为 $M_{\text{min}} = 16$ 。由于文献[9]的方法没有考虑基线几何和信噪比等参数对最少航过数量的影响, 因此该方法估计得到的最少航过数量为固定值。图11(见5.3节)给出了不同信噪比条件下所需的最少航过数量。从图11可以看出, 当信噪比降低时, 需要增加航过数量以保证重构结果可靠。对均匀层析SAR和互质层析SAR而言, 当信噪比分别低于1.6 dB和-2.3 dB时, 16条航过在实测意义上已经无法保证重构结果可靠。

相比较而言, 本文方法能够准确跟踪参数变化引起的最少航过数量的变化, 从而使得所选定的航过数量能够保证相应条件下的重构结果可靠。此外, 从图11可以看出, 当信噪比变化有利于降低所需的最少航过数量时, 本文方法能够准确响应这种变化, 从而使得所选定的航过数量尽可能少。根据图11的结果可知, 对于均匀层析SAR和互质层析SAR, 当信噪比分别高于3.3 dB和-0.2 dB时, 由本文方法估算的最少航过数量小于16。

下面分析由文献[9]方法设计的层析SAR的重构性能。根据本次的实验参数, 由文献[9]方法估计得到的最少航过数量和基线孔径长度分别为 $M_{\text{min}} = 16$, $B = 112$ m。文献[9]仅考虑了均匀层析SAR。因此在本次实验中, 按照文献[9]方法设计的均匀层析SAR的最小航过间隔 $d = 7.5$ m。为了与互质层析SAR做比较, 在固定航过数量和基线孔径的条件下, 构造互质层析SAR。相应地, 互质层析SAR的互质整数对为 $M_1 = 9$, $M_2 = 8$, 最小航过间隔 d 等于1.8 m。

图14(a)给出了正确检测概率随信噪比的变化。从图14(a)可以看出, 当信噪比低于1.6 dB时, 由文献[9]方法选定的航过数量无法保证重构结果的可靠性。这是因为文献[9]方法没有考虑信噪比变化对最少航过数量的影响。通过比较均匀层析SAR和互质层析SAR可以发现, 两者的重构性能基本相等。

这是因为在本次实验中, 两者的航过数量和基线孔径长度都相等。

图14(b)给出高度估计RMSE随信噪比的变化。从图中可以看出, 当信噪比较高时, 高度估计误差基本趋于各自的CRB。通过比较均匀层析SAR和互质层析SAR可以发现, 两者的高度估计精度非常接近。这说明, 相比于均匀层析SAR, 互质层析SAR的优势在于通过稀疏分布航过位置来延长基线孔径, 从而达到提高层析重构性能的目的。在信噪比较小的区域, 互质层析SAR的部分估计结果由于发生子空间交换, 导致高度估计偏差较大。根据式(9)计算本次实验条件下所需的最小信噪比。图14(b)中的黑色虚线和蓝色虚线分别给出均匀层析SAR和互质层析SAR所需的最低信噪比, 分别是3.3 dB和3.1 dB。比较可以发现, 当信噪比超过最低信噪比时, 高度估计结果可靠。互质层析SAR的部分估计结果虽然出现异常值, 但是高度估计误差接近0.1 m。这说明, 由本文方法估计的航过数量能够保证层析重构结果可靠。

5.5 基线偏差对层析性能的影响

在实际数据获取过程中, 由于气流扰动的影响, 机载平台的实际航迹会偏离预先规划的航迹位置, 导致出现基线偏差。基线位置的理想值与其真实值之间的偏差通常包含两部分, 分别是基线偏差和基线误差。基线偏差是指由气流扰动导致基线位置的测量值与其理想值之间的偏差, 但是导航设备能够测量这部分偏差。基线误差是指由导航设备的测量精度不足造成的基线位置的测量值与其真实值之间的偏差, 而这部分偏差通常是未知的。就目前导航设备的技术水平而言, 机载平台的航迹偏差可以控制在2~3 m, 而基线误差在几十厘米量级。

就基线偏差和基线误差对层析性能的影响而言, 由于基线误差和基线偏差相差一个量级, 因此在基线误差得到准确校正的情况下, 其对层析重构结果最终性能的影响可以被忽略。因此, 在实验过程中, 仅考虑基线偏差对层析性能的影响。

下面比较理想情况下和存在基线偏差情况下的层析性能。

关于仿真实验参数, 假定观测场景中有2个等功率的散射点且 $\text{SNR} = 0$ 。两个散射点的高度位置分别为 $h_1 = -\Delta h/2$, $h_2 = \Delta h/2$ 。高度间隔 Δh 的变化范围为0.1~2.0 m。视数 $L = 20$ 。理论分辨率 $\rho_h = 1$ m, 由本文方法计算得到理想情况下的最少航过数量和最小航过间隔分别为: $M_{\text{min}} = 18$, $d_M = 7.4$ m (均匀层析SAR); $M_{\text{min}} = 10$; $d_M = 6.1$ m (互质层析SAR)。

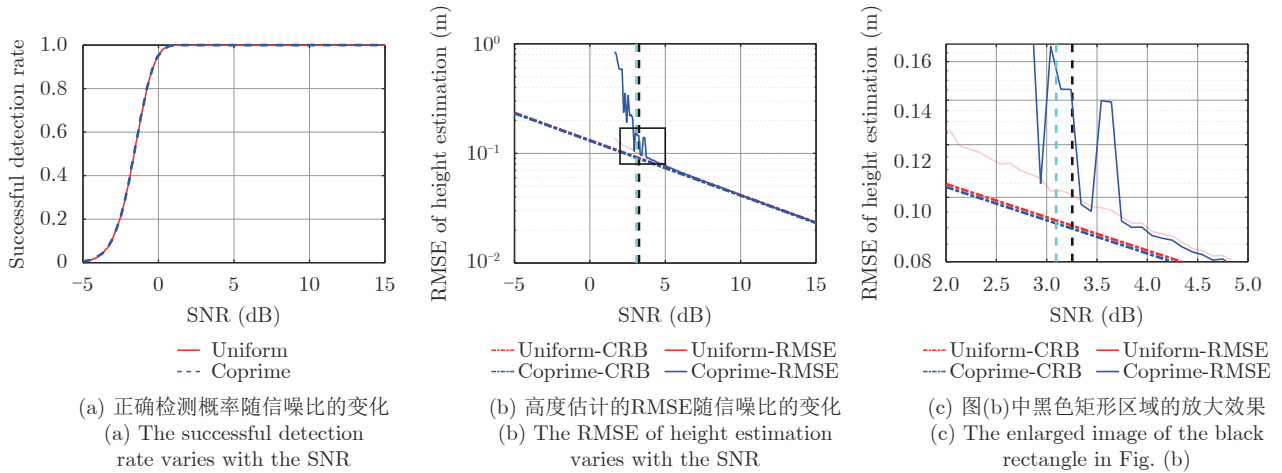


图 14 由文献[9]方法设计的均匀层析SAR和互质层析SAR的重构结果[均匀层析SAR ($M=16$; $d=7.5$ m; $B=112$ m); 互质层析SAR ($M_1=9$, $M_2=8$; $d=1.8$ m; $B=112$ m)]

Fig. 14 The reconstruction results from the uniform TomoSAR and the coprime TomoSAR which are designed by Ref. [9] vary with the SNR [the uniform TomoSAR ($M=16$; $d=7.5$ m; $B=112$ m); the coprime TomoSAR ($M_1=9$, $M_2=8$; $d=1.8$ m; $B=112$ m)]

当存在基线偏差时, 基线位置的实测值为 $\tilde{b}_m = b_m + \delta b$, 其中 b_m 表示基线位置的理想值; δb 表示基线偏差。实验中假定基线偏差在一定范围内服从均匀分布, 即 $\delta b \sim U(-\delta_{\max}, \delta_{\max})$, 其中 δ_{\max} 表示基线偏差的最大偏移量。在每一次独立实验中, 基线位置均按照这种方式随机生成。本次实验考虑4种不同最大偏移量, 即 $\delta_{\max} = 0, 0.5, 1.5, 2.4$ m。当 $\delta_{\max} = 0$ 时, 基线位置的实测值与其理想值相等。 $\delta_{\max} = 2.4$ m 恰好对应航迹的地距和垂直高度的偏移量均为3 m。

关于高度位置的估计方法, 对于理想情况下, 仍然采用经典Root-MUSIC算法[21]。然而, 由于存在基线偏差, 经典Root-MUSIC算法不再适用。针对存在基线偏差情况下的高度位置估计, 我们采用FD Root-MUSIC算法。

图15给出了存在基线偏差情况下和理想情况下的正确检测概率曲线。从图15可以看出, 对于任意一种基线几何, 各种基线偏差情况下的正确检测概率曲线与其理想情况下的基本重合。这说明, 当基线偏差处于合理范围内时, 分辨率性能基本上不受基线偏差的影响。这种结果很容易被解释。这是因为, 在固定航过数量和基线孔径长度的情况下, 样本特征值几乎不随基线几何变化, 因此各种基线偏差情况下的正确检测概率基本一致。这种结果与图14的结果类似。图14表明, 在固定航过数量和基线孔径长度的情况下, 均匀层析SAR和互质层析SAR的性能基本一致。

图16给出了存在基线偏差情况下和理想情况下的高度估计RMSE。通过比较可以发现,

(1) 当高度间隔大于分辨率指标时(即 $\Delta h \geq \rho_h$), 理想情况下和存在基线偏差情况下的高度估计性能

基本一致。除了, 互质层析SAR在 $\Delta h \approx 1.035$ m 时由于发生“性能崩塌”而出现异常。

(2) 当接近“性能崩塌”区域时(图像左侧), 基线偏差的增大会增加“性能崩塌”现象发生的概率, 导致高度估计精度下降。这是因为这一区域介于可靠重构和不可靠重构的边缘, 因此影响子空间方法性能的相关参数的微小变化都会引发“性能崩塌”现象。虽然由基线偏差引发的“性能崩塌”事件发生的概率极小, 但是“性能崩塌”对高度估计的影响很大, 导致高度估计的RMSE严重偏离其CRB。

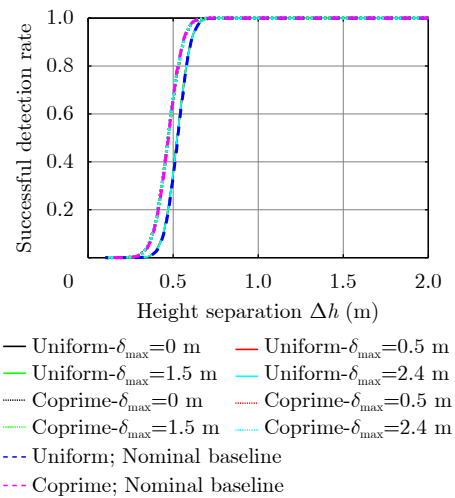


图 15 存在基线偏差情况下和理想情况下的正确检测概率($K=2$; 所有散射点的信噪比均等于0 dB; $L=20$; $\rho_h=1$ m)

Fig. 15 Successful detection rate calculated from the deviated tracks and the nominal tracks ($K=2$; all the SNRs=0 dB; $L=20$; $\rho_h=1$ m)

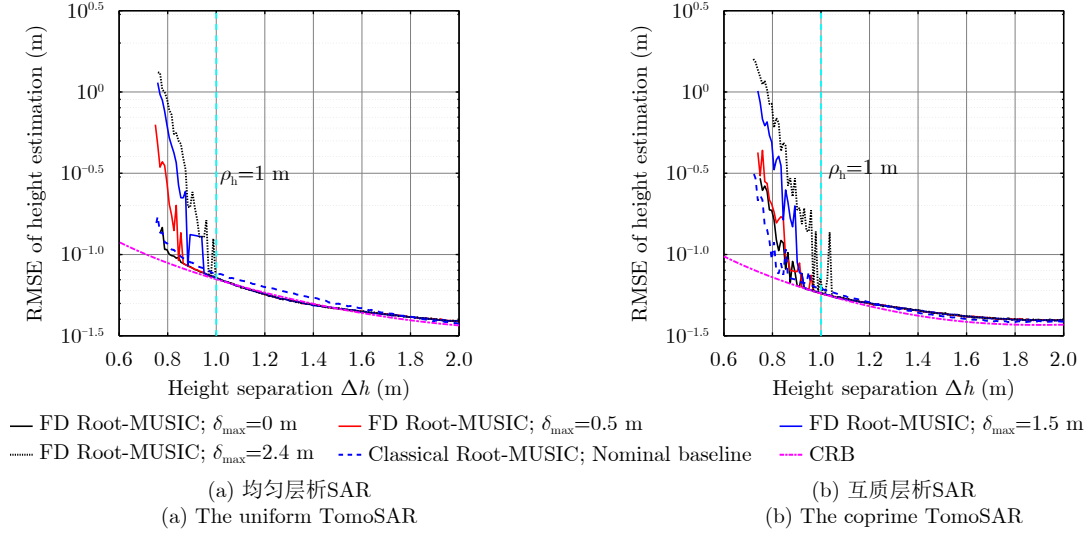


图 16 存在基线偏差情况下和理想情况下的高度估计的RMSE(实验参数的设置与图 15 中的参数相等)

Fig. 16 RMSE of the height estimation calculated from the deviated tracks and the nominal tracks (the simulation parameters are set as the same as in Fig. 15)

(3) FD Root-MUSIC算法和经典Root-MUSIC算法的高度估计性能基本相同。这一结论可以通过比较 $\delta_{\max}=0$ 情况下的FD Root-MUSIC算法与理想基线情况下的经典Root-MUSIC算法的高度估计结果得出。通过比较,发现两者的高度估计的RMSE基本一致。

从分辨率和高度估计的分析实验中可以看出,当基线偏差处于合理范围内时,存在基线偏差情况下的层析性能与相应的理想情况下的层析性能基本接近。这种结果也很容易理解。因为,在基线位置准确已知的情况下,基线偏差对层析性能的影响不一定是负面作用。同时发现,基线偏差的确对高度估计带来了一定的影响,尤其在“性能崩塌”区域。因此,在实际应用中,更可靠的做法就是在估计最少航过数量的过程中考虑基线偏差的影响。后续,会对这一问题开展研究。

6 结语

在应用子空间方法重构层析图的实践中,为了保证所选定的航过数量能够获得可靠的重构结果,本文研究了最少航过数量估计问题。在分析最少航过数量的过程中,考虑到子空间方法的重构性能依赖于样本特征值,我们通过定量分析样本特征值与所有相关参数之间的关系,定义了可靠重构的保证条件。基于这个可靠性保证条件,本文提出了一种估计最少航过数量的方法。该方法能够准确跟踪参数变化对最少航过数量的影响,因此由该方法选定的航过数量能够保证子空间方法的重构结果可靠。

此外,该方法具有解析的数学公式。因此,在层析性能给定的情况下,该方法通过简单的数值计算就可以得到最少航过数量。实验结果表明,由本文方法所选定的航过数量确实接近最小,且能够保证重构结果可靠。虽然本文考虑是互质基线几何,但是本文方法能够适用于任意构型的基线几何。

附录 在3个散射点数量情况下,信号期望特征值与相关参数之间的解析关系式

假定场景中存在 $K=3$ 个点目标,且噪声为加性高斯白噪声,则期望协方差矩阵具有如下形式

$$\mathbf{R} = s_1^2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H + s_2^2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H + s_3^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (\text{A-1})$$

式中,为了简化,令 $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}(h_k), k = 1, 2, 3$ 。

下面,推导矩阵 \mathbf{R} 的特征多项式和特征值与相关参数之间的解析关系式。

由矩阵特征值的特性可知:(1)矩阵 \mathbf{AB} 的特征值与矩阵 \mathbf{BA} 的特征值相等,而特征值相等则意味着两个矩阵的特征多项式也完全相等。(2)如果 λ 为矩阵 \mathbf{A} 的一个特征值,则 $\lambda+1$ 是 $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ 的特征值。因为 $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$,必定有 $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x}=(\lambda+1)\mathbf{x}$,式中 \mathbf{x} 表示与特征值 λ 对应的特征向量。

令矩阵 $\mathbf{A}_3 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$, 对角矩阵 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}([\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2])$, 则矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{A}_3 \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_3^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M$ 。根据特征值的性质可知,协方差矩阵 \mathbf{R} 的特征值等于 $\text{eig}(\mathbf{A}_3 \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_3^H) + \sigma^2$, 其中 $\text{eig}(\cdot)$ 表示特征值求解运算。下面为了简化,讨论矩阵 $\mathbf{A}_3 \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_3^H$ 的特征值。

已知

$$\mathbf{A}_3^H \mathbf{A}_3 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^H \\ \mathbf{a}_2^H \\ \mathbf{a}_3^H \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & & \\ & \gamma_2^2 & \\ & & \gamma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 & \gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 & \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \\ \gamma_1^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 & \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 & \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 \\ \gamma_1^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 & \gamma_2^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 & \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

因此, 矩阵 $\mathbf{A}_3 \mathbf{A} \mathbf{A}_3^H$ 的特征多项式 $p(\lambda)$ 为

$$p(\lambda) = |\mathbf{A}_3 \mathbf{A} \mathbf{A}_3^H - \lambda \mathbf{I}_M| = |\mathbf{A}_3^H \mathbf{A}_3 \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_M| = \left| \begin{bmatrix} \gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 - \lambda & \gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 & \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \\ \gamma_1^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 & \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 - \lambda & \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 \\ \gamma_1^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 & \gamma_2^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 & \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 - \lambda \end{bmatrix} \right| \quad (\text{A-3})$$

式中, $|\mathbf{A}|$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的行列式。

令矩阵 \mathbf{B} 等于

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 - \lambda & \gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 & \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \\ \gamma_1^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 & \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 - \lambda & \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 \\ \gamma_1^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 & \gamma_2^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 & \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 - \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

由行列式性质可知, $|\mathbf{B}| = (\gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 - \lambda) |\mathbf{M}_{11}| + (-1)^{1+2} \gamma_1^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 |\mathbf{M}_{21}| + (-1)^{1+3} \gamma_1^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 |\mathbf{M}_{31}|$, 式中 \mathbf{M}_{ij} 表示矩阵 \mathbf{B} 的子式, 即删除第 i 行和第 j 列的公式。

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_{11}| = (\gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 - \lambda) (\gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 - \lambda) - \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 \\ |\mathbf{M}_{21}| = \gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 (\gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 - \lambda) - \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \\ |\mathbf{M}_{31}| = \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 - \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 (\gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 - \lambda) \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

因此, 特征多项式 $p(\lambda)$ 为

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\mathbf{B}| = (\gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 - \lambda) |\mathbf{M}_{11}| + (-1)^{1+2} \gamma_1^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 |\mathbf{M}_{21}| + (-1)^{1+3} \gamma_1^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 |\mathbf{M}_{31}| \\ &= \underbrace{(\gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 - \lambda) [(\gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 - \lambda) (\gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 - \lambda) - \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3]}_{E_1} \\ &\quad - \underbrace{\gamma_1^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 [\gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 (\gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 - \lambda) - \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3]}_{E_2} \\ &\quad + \underbrace{\gamma_1^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 [\gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 - \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 (\gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 - \lambda)]}_{E_3} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

将式(A-6)中的3个分量 E_1 , E_2 和 E_3 分别展开可得

$$\begin{cases} E_1 = -\lambda^3 + (\gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 + \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3) \lambda^2 \\ \quad - (\gamma_1^2 \gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 + \gamma_1^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3) \lambda + \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 \lambda \\ \quad + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 \\ E_2 = \gamma_1^2 \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \lambda - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \\ E_3 = \gamma_1^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \lambda - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 \end{cases} \quad (\text{A-7})$$

因此

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= E_1 + E_2 + E_3 \\ &= -\lambda^3 + (\gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 + \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3) \lambda^2 \\ &\quad - (\gamma_1^2 \gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 + \gamma_1^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3) \lambda \\ &\quad + (\gamma_1^2 \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 + \gamma_1^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3) \lambda \\ &\quad + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 (\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3) \\ &\quad - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 (\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3) \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

经过以上证明, 得出矩阵 $\mathbf{A}_3 \mathbf{A} \mathbf{A}_3^H$ 的特征值多项式 $p(\lambda) = c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4$, 式中

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = \gamma_1^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 + \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 \\ c_3 = -(\gamma_1^2 \gamma_2^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 + \gamma_1^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3) \\ \quad + (\gamma_1^2 \gamma_2^2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 + \gamma_1^2 \gamma_3^2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3) \\ c_4 = +\gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 (\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3) \\ \quad - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 (\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2^H \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3^H \mathbf{a}_3) \end{cases}$$

根据一元3次方程的求根公式，可得多项式 $p(\lambda)$ 的3个实根(因为对应矩阵具有共轭对称特性)分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{c_2}{3c_1} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \lambda_2 = -\frac{c_2}{3c_1} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \lambda_3 = -\frac{c_2}{3c_1} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

式中

$$\begin{cases} p = \frac{3c_1c_3 - c_2^2}{3c_1^2} \\ q = \frac{2c_2^3 - 9c_1c_2c_3 + 27c_1^2c_4}{27c_1^3} \\ \omega = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

由此，可得3个散射点情况下信号的期望特征值为 $\gamma_k = \lambda_k + \sigma^2$, $k=1, 2, 3$ 。

参考文献

- [1] RAMBOUR C, BUDILLON A, JOHNSY A C, *et al.* From interferometric to tomographic SAR: A review of synthetic aperture radar tomography-processing techniques for scatterer unmixing in urban areas[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*, 2020, 8(2): 6–29. doi: [10.1109/MGRS.2019.2957215](https://doi.org/10.1109/MGRS.2019.2957215).
- [2] REIGBER A and MOREIRA A. First demonstration of airborne SAR tomography using multibaseline L-band data[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2000, 38(5): 2142–2152. doi: [10.1109/36.868873](https://doi.org/10.1109/36.868873).
- [3] YU Longlong, HUANG Xiaotao, FENG Dong, *et al.* Coprime synthetic aperture radar tomography[C]. 2021 2nd China International SAR Symposium (CISS), Shanghai, China, 2021: 1–6. doi: [10.23919/CISS51089.2021.9652324](https://doi.org/10.23919/CISS51089.2021.9652324).
- [4] YU Longlong, FENG Dong, WANG Jian, *et al.* An efficient reconstruction approach based on atomic norm minimization for coprime tomographic SAR[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2022, 19: 4503705. doi: [10.1109/LGRS.2022.3143662](https://doi.org/10.1109/LGRS.2022.3143662).
- [5] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with Co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: [10.1109/TSP.2010.2089682](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2089682).
- [6] LOMBARDINI F and PARDINI M. 3-D SAR tomography: The multibaseline sector interpolation approach[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2008, 5(4): 630–634. doi: [10.1109/LGRS.2008.2001283](https://doi.org/10.1109/LGRS.2008.2001283).
- [7] NANNINI M, REIGBER A, and SCHEIBER R. A study on irregular baseline constellations in SAR tomography[C]. 8th European Conference on Synthetic Aperture Radar, Aachen, Germany, 2010: 1–4.
- [8] WEI Lianhuan, FENG Qiuyue, LIU Shanjun, *et al.* Minimum redundancy array—A baseline optimization strategy for urban SAR tomography[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(18): 3100. doi: [10.3390/rs12183100](https://doi.org/10.3390/rs12183100).
- [9] NANNINI M, SCHEIBER R, and MOREIRA A. Estimation of the minimum number of tracks for SAR tomography[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2009, 47(2): 531–543. doi: [10.1109/TGRS.2008.2007846](https://doi.org/10.1109/TGRS.2008.2007846).
- [10] ZHU Xiaoxiang and BAMLER R. Super-resolution power and robustness of compressive sensing for spectral estimation with application to spaceborne tomographic SAR[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2012, 50(1): 247–258. doi: [10.1109/TGRS.2011.2160183](https://doi.org/10.1109/TGRS.2011.2160183).
- [11] ZHU Xiaoxiang, GE Nan, and SHAHZAD M. Joint sparsity in SAR tomography for urban mapping[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2015, 9(8): 1498–1509. doi: [10.1109/JSTSP.2015.2469646](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2015.2469646).
- [12] NADLER B. Finite sample approximation results for principal component analysis: A matrix perturbation approach[J]. *The Annals of Statistics*, 2008, 36(6): 2791–2817. doi: [10.1214/08-aos618](https://doi.org/10.1214/08-aos618).
- [13] NADAKUDITI R R and EDELMAN A. Sample eigenvalue based detection of high-dimensional signals in white noise using relatively few samples[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(7): 2625–2638. doi: [10.1109/](https://doi.org/10.1109/)

- TSP.2008.917356.
- [14] FORNARO G, VERDE S, REALE D, *et al.* CAESAR: An approach based on covariance matrix decomposition to improve multibaseline-multitemporal interferometric SAR processing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(4): 2050–2065. doi: [10.1109/TGRS.2014.2352853](https://doi.org/10.1109/TGRS.2014.2352853).
- [15] NAVNEET S, KIM J W, and LU Zhong. A new InSAR persistent scatterer selection technique using top eigenvalue of coherence matrix[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2018, 56(4): 1969–1978. doi: [10.1109/TGRS.2017.2771386](https://doi.org/10.1109/TGRS.2017.2771386).
- [16] PAUCIULLO A, REALE D, FRANZÉ W, *et al.* Multi-look in GLRT-based detection of single and double persistent scatterers[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2018, 56(9): 5125–5137. doi: [10.1109/TGRS.2018.2809538](https://doi.org/10.1109/TGRS.2018.2809538).
- [17] D'HONDT O, LÓPEZ-MARTÍNEZ C, GUILLASO S, *et al.* Nonlocal filtering applied to 3-D reconstruction of tomographic SAR data[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2018, 56(1): 272–285. doi: [10.1109/TGRS.2017.2746420](https://doi.org/10.1109/TGRS.2017.2746420).
- [18] ZHU Xiaoxiang and BAMLER R. Superresolving SAR tomography for multidimensional imaging of urban areas: Compressive sensing-based TomoSAR inversion[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2014, 31(4): 51–58. doi: [10.1109/MSP.2014.2312098](https://doi.org/10.1109/MSP.2014.2312098).
- [19] JOHNSON B A, ABRAMOVICH Y I, and MESTRE X. MUSIC, G-MUSIC, and maximum-likelihood performance breakdown[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 3944–3958. doi: [10.1109/TSP.2008.921729](https://doi.org/10.1109/TSP.2008.921729).
- [20] SHAGHAGHI M and VOROBYOV S A. Subspace leakage analysis and improved DOA estimation with small sample size[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(12): 3251–3265. doi: [10.1109/TSP.2015.2422675](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2422675).
- [21] FRIEDLANDER B. The root-MUSIC algorithm for direction finding with interpolated arrays[J]. *Signal Processing*, 1993, 30(1): 15–29. doi: [10.1016/0165-1684\(93\)90048-F](https://doi.org/10.1016/0165-1684(93)90048-F).
- [22] RUBSAMEN M and GERSHMAN A B. Direction-of-arrival estimation for nonuniform sensor arrays: From manifold separation to fourier domain MUSIC methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(2): 588–599. doi: [10.1109/TSP.2008.2008560](https://doi.org/10.1109/TSP.2008.2008560).
- [23] STOICA P and NEHORAI A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(5): 720–741. doi: [10.1109/29.17564](https://doi.org/10.1109/29.17564).

作者简介



于龙龙(1988–), 男, 宁夏固原人, 国防科技大学电子科学学院博士生, 研究方向为层析SAR三维成像技术。



王 建(1981–), 男, 湖北宜城人, 国防科技大学电子科学学院讲师、博士, 主要研究方向为宽带雷达系统与智能信息处理技术。



冯 东(1991–), 男, 重庆涪陵人, 国防科技大学电子科学学院讲师, 主要研究方向为机载SAR三维成像技术。



黄晓涛(1972–), 男, 湖北武汉人, 国防科技大学电子科学学院教授、博士生导师, 主要研究方向为雷达成像技术、超宽带雷达成像技术以及阵列信号处理技术等。

(责任编辑: 高华)