

基于假设检验理论的雷达近邻目标距离统计分辨限

张云雷^{①②} 汤俊^{*①} 王力^①

^①(清华大学电子工程系 北京 100084)

^②(海军工程大学电子工程学院 武汉 430033)

摘要: 分辨率是雷达系统的重要性能指标之一, 传统采用模糊函数(AF)来分析波形的距离和多普勒分辨能力。该文提出以下观点: 第一, 传统的模糊函数分析方法的基本出发点是首先采用匹配滤波来处理回波信号, 而从机理上来说, 匹配滤波是在白噪声和点目标前提下使得输出信噪比(SNR)最大, 对检测来说最优, 但不适用于多个目标的分辨问题; 第二, 模糊函数分析方法并不能反映出噪声、目标起伏等随机因素, 以及近距多目标波形相互干扰等因素的影响; 第三, 模糊函数只适用于两相同信噪比目标分辨, 不适用于实际中经常存在的不同信噪比的多个目标的分辨。该文基于原始回波数据, 采用统计学中的假设检验理论来研究雷达近邻目标距离分辨的问题, 在给出统计意义上的正确分辨概率和虚判概率定义基础上, 推导近邻目标距离统计分辨限(SRL)的表达式。仿真表明, 统计分辨限可以突破瑞利限。当设定虚判概率和分辨概率分别为0.001和0.5时, 对两幅度相位差为90度的0 dB的线性调频信号, 距离统计分辨下限可达0.3倍瑞利限。

关键词: 假设检验; 统计分辨限; 泰勒展开; 广义似然比; 距离分辨率

中图分类号: TN957

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2019)01-0017-08

DOI: 10.12000/JR18085

引用格式: 张云雷, 汤俊, 王力. 基于假设检验理论的雷达近邻目标距离统计分辨限[J]. 雷达学报, 2019, 8(1): 17–24. doi: 10.12000/JR18085.

Reference format: ZHANG Yunlei, TANG Jun, and WANG Li. Hypothesis-testing-based range statistical resolution limit of radar[J]. *Journal of Radars*, 2019, 8(1): 17–24. doi: 10.12000/JR18085.

Hypothesis-testing-based Range Statistical Resolution Limit of Radar

ZHANG Yunlei^{①②} TANG Jun^{*①} WANG Li^①

^①(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

^②(Institute of Electronic Engineering, Navy University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: Resolution performance is an important performance criteria of the radar systems. Typically, the Ambiguity Function (AF) of signals is used to define the range and Doppler limits. In this study Some new opinions are proposed—First, the AF is based on the signals processed with matched filter, which can guarantee the maximization of the output of the Signal-to-Noise Ratio (SNR). Thus, the AF is optimal for target detection. However, the AF is unsuitable for the resolution of multiple targets. Second, the AF cannot reflect the effect of random factors, such as noise, target fluctuation, and mutual interference of close targets. Third, the AF can only handle two equal-powered targets and provide the conclusion of the limits. However, the AF fails to distinguish multiple unequal-powered targets, which is often the case in reality. Therefore, the hypothesis testing theory is applied to resolve the range resolution of two closely spaced targets for radars, and our study is based on the original echoes of the signals. With the definition of the correct resolution and false alarm rates in the statistical standpoint, we derive the expression of the range Statistical Resolution Limit (SRL). The simulation results indicate that the SRL can exceed the Rayleigh limit. With the false alarm and

收稿日期: 2018-09-30; 改回日期: 2018-12-11; 网络出版: 2019-01-09

*通信作者: 汤俊 tangj_ee@tsinghua.edu.cn *Corresponding Author: TANG Jun, tangj_ee@tsinghua.edu.cn

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFA0302102), 国家自然科学基金(61501486)

Foundation Items: The National Key Research and Development Program of China (2016YFA0302102), The National Natural Science Foundation of China under Grant (61501486)

correct resolution rates being 0.001 and 0.5, respectively, for the two phase-orthogonal linear-frequency-modulated signals, the range SRL can be as low as 0.3 times of the Rayleigh limit.

Key words: Hypothesis-testing; Statistic Resolution Limit (SRL); Taylor expansion; Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT); Range resolution

1 引言

分辨问题是雷达系统的基本问题之一。传统方法是利用波形模糊函数来定义分辨限^[1],即考察特定波形在和理想目标回波(含距离时延和多普勒调制)匹配滤波后响应函数波峰的3 dB或4 dB宽度,由此来确定该雷达波形对应的距离分辨率和多普勒分辨率,一般工程实践中将这个宽度对应的分辨率限称为瑞利限,并认为实际中当两个目标的时延间隔或者多普勒差异在瑞利限以内时,将无法分辨。两线性调频(LFM)信号在时间上相距瑞利限内间隔时匹配滤波结果会产生相加混叠效果。如图1所示,两目标距离为 $0.5/B$ 时(B 为信号带宽),匹配滤波只能得到1个峰值,而当两目标的距离达到 $1.5/B$ 时出现2个峰值。因此,目前在雷达的工程实践中,一般采用模糊函数分析方法,距离上相近目标可分辨的瑞利限定义为 $\delta^{\text{rayleigh}} = 1/B$ 。

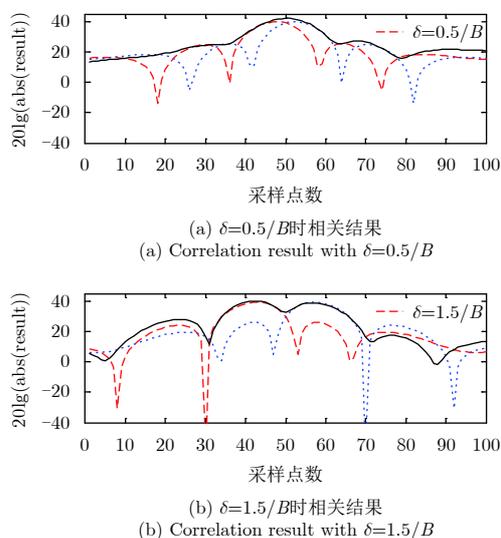


图 1 两线性调频信号相关的单次蒙特卡洛仿真

Fig. 1 Monte Carlo simulation of the correlation result of two LFM signals

采用传统模糊函数分析方法可以得到某种雷达波形所对应的确定性分辨率指标,但是需要进一步探究以下问题:第一,传统的模糊函数分辨限分析方法基本出发点是采用匹配滤波来处理回波信号,匹配滤波在白噪声和点目标前提下使得输出信噪比最大,对检测来说最优,并不适用于多个目标的分辨问题;第二,模糊函数分析方法并不能反映出噪

声、目标起伏等随机因素、以及近距多目标波形相互干扰等因素的影响;第三,模糊函数分析方法只能对两个相同信噪比的目标给出分辨率的结论,但不适用于实际中经常存在的不同信噪比的多个目标的分辨。

在一些相关的领域如波达方向角(DOA)、功率谱、空间谱估计中,已经开展了大量高分辨理论和算法的研究,并实现了对瑞利限的突破^[2-4]。因此,有必要对传统雷达模糊函数分析方法所确定的雷达波形分辨率分析方法做进一步的探讨和研究。

为便于分析,本文采取如下研究思路:

(1) 对雷达分辨问题场景简化:一是先仅考虑距离分辨问题,即忽略多普勒分辨问题。如果1维距离分辨问题可以得到解决,则推广到2维的场景即是一个相对比较自然的过程。二是先考虑两个目标的分辨问题,因为一旦两个目标的问题解决,多目标分辨问题可以自然外推;

(2) 对雷达分辨问题模型简化:对于接收机收到的两个和噪声相混叠的雷达目标回波,存在两种不同的分辨问题定义:(a)分辨模型1——通过处理,判定存在两个目标,但不需要同时估计出两个目标的位置,因为一旦有了两个目标存在的先验信息,有很多超分辨算法用于实现位置的估计。(b)分辨模型2——通过处理,判定存在两个目标,同时两个目标位置的估计值也满足准确性要求,如误差小于某个阈值。可以发现,分辨模型2比分辨模型1的要求更高,因为其将目标数估计和目标参数估计问题同时进行了考虑,分析也更为复杂。所以,为简化问题,本文暂时只考虑分辨模型1;

(3) 对待分辨信号形式进行前推:在工程实践中,经常首先实现对回波信号的匹配滤波以最大化输出信噪比。最大化输出信噪比对于目标检测在理论上已经证明是最优的,但是输出高信噪比对于近邻目标的分辨是否一定是最有利,这个问题还是存疑的。因为在高信噪比条件下,两个目标匹配滤波的响应函数之间的相互影响也会更加严重,甚至有可能导致分辨性能下降。因此,本文直接对原始回波数据进行处理,以去除匹配滤波可能带来的影响;

(4) 把分辨问题看成是一个统计问题:由于噪声、目标起伏等随机因素的存在,雷达中目标分辨问题实际是一个随机问题,存在正确分辨概率和错误分辨概率。而传统的模糊函数分析法没有考虑到

随机性, 只能给出一个确定性的分辨率指标, 这对指导实际的雷达系统性能测试和标定等存在一定的问题。本文明确提出统计分辨率的概念, 并给出正确分辨概率和错误分辨概率的表达式, 这对于工程实践将具有指导意义。

本文将分辨看作是一个统计问题, 研究目标是统计分辨限(Statistical Resolution Limit, SRL)。当前, 和统计分辨率相关的研究工作主要有两个方向:

一是直接从目标参数估计的准确性出发, 对统计分辨率进行研究^[5-8]。如文献[5]针对多个不同频率信号的分辨问题, 直接基于目标参数估计的统计下界克拉美罗界(Cramer-Rao Bound, CRB)来定义, 并将系统的分辨率表示为 $p\min_k \left(\sqrt{\text{CRB}(\theta_k)} \right)$, 其中参数 p 为恒定系数, θ_k 为待分辨参数。文献[6]考虑到两信号之间的耦合, 将上述定义扩展到待分辨参数间隔的统计下限, 为 $p\sqrt{\text{CRB}(\theta_1 - \theta_2)}$ 。文献[7]则从多维统计分辨角度更深入地描述了该问题。文献[8]讨论了近场条件下基于CRB定义的统计分辨限。总体来看, 基于CRB定义的SRL反映了对参数估计的准确程度, 具有一定物理意义, 但该类方法需假定目标个数已知, 同时在参数 p 的选择上存在一定的主观性, 并不能直接应用于实际雷达目标的距离分辨问题中来。

二是采用假设检验理论来研究分辨问题。如文献[9]研究了白噪声中两频率相近正弦信号的频率统计分辨问题, 并与MUSIC方法超分辨性能进行了比较。文献[10]推导了高斯白噪声条件下3维空间中两近邻目标的方位SRL, 并采用广义似然比(GLRT)统计量获得了渐进分辨性能, 推导了分辨限与CRB的关系。EL KORSO等人^[11]针对被动阵列应用场景, 系统地研究了存在点源干扰条件下两空间近邻目标的方位统计分辨限。文献[12]基于信息论准则, 讨论了两方位近邻目标的统计分辨性能。文献[13]则将相关研究从GLRT检测扩展到Rao检测。文献[14]针对TR-MIMO雷达讨论了方位统计分辨问题。SHAHAM等人^[15,16]则假定匹配滤波后响应函数 $\text{sinc}^2(x)$, 研究光学领域成像的距离统计分辨性能。上述研究工作主要集中在方位和频率维度的统计分辨性能, 围绕雷达距离统计分辨率研究目前还处于起步阶段。

本文针对分辨模型1, 采用假设检验理论研究雷达近邻目标的分辨问题: 在某一段距离范围内, 假定已经确定有目标存在, 需要判定是一个还是两个目标。

本文采用如下定义: (1)分辨概率——指能够正确判定存在两个目标的概率; (2)虚判概率——

实际只有一个目标, 但判定为两个目标的概率。通过研究回答以下问题: 一是给定雷达波形、两目标距离间隔和虚判概率, 如何计算理论上能够达到的最大分辨概率。二是给定雷达波形、虚判概率和分辨概率, 如何计算理论上能够达到的最小两目标分辨极限。

本文中, $(\cdot)^T$ 和 $(\cdot)^H$ 分别表示向量或矩阵的转置和共轭转置, $(\cdot)^*$ 表示取共轭操作。 $[s]$ 代表不超过 s 的最大整数。 \mathbf{I}_L 表示维度为 $L \times L$ 的单位阵。 \mathbb{R} 和 \mathbb{C} 分别是实数和复数的集合, $\text{Re}(\cdot)$ 和 $\text{Im}(\cdot)$ 分别为复数的实部和虚部。本文组织如下: 第2节介绍问题的模型, 第3节开展统计分辨性能的讨论和分析, 第4节给出仿真结果, 第5节进行总结。

2 基于假设检验的近距离分辨模型

在考虑分辨问题时, 和文献[9-16]相类似, 本文研究前提是判断出有目标存在。例如可通过匹配滤波处理, 得到目标回波的匹配滤波输出响应, 形成有效目标存在性的判决, 并粗略判断出目标回波的中心位置。下面将基于目标存在和中心位置已知的信息, 来判断是一个目标还是两个目标。

假定雷达发射的基带复信号为 $s(t)$, 两目标回波幅度分别为 α_1 和 α_2 , 注意 α_1 和 α_2 为复数。两目标回波到达时间分别为 t_1 和 t_2 , 即雷达基带回波信号可表示为 $x(t) = \alpha_1 s(t - t_1) + \alpha_2 s(t - t_2)$, 信号 $s(t)$ 带宽为 B , 时宽为 τ , 假定两回波间隔为 $t_1 - t_2 = \delta_t$ 小于瑞利分辨单元, 即 $\delta_t < 1/B$, 且两回波的中心 $t_0 = (t_1 + t_2)/2$ 已知。 $n(t)$ 为零均值、方差为 σ^2 的复加性高斯白噪声。上述分辨问题可以建模为二元假设检验问题, 表示为

$$x(t) = \begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2) s(t - t_0) + n(t), & H_0 \\ \alpha_1 s(t - t_1) + \alpha_2 s(t - t_2) + n(t), & H_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, H_0 假设代表只有一个目标, H_1 假设代表存在两个目标。假设检验的目标就是要判断两信号的时延差 $\delta_t = t_2 - t_1$ 是否为0。对近邻目标, 假定 δ_t 足够小, 令 $t' = t - t_0$, $\alpha_- = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_+ = \alpha_1 + \alpha_2$, 将 H_1 表达式在 t' 处进行泰勒展开保留2阶项, 可得

$$\begin{aligned} & \alpha_1 s\left(t' + \frac{\delta_t}{2}\right) + \alpha_2 s\left(t' - \frac{\delta_t}{2}\right) \\ & \approx \alpha_+ s(t') + \frac{\delta_t}{2} \alpha_- \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t'} + \frac{\delta_t^2}{8} \alpha_+ \left. \frac{d^2s(t)}{dt^2} \right|_{t=t'} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t'}$ 为信号 $s(t)$ 在 t' 处的1阶导数, $\left. \frac{d^2s(t)}{dt^2} \right|_{t=t'}$ 为 $s(t)$ 在 t' 处的2阶导数。

对信号及1阶、2阶导数的波形进行等间隔采样, 采样频率 f_s 大于信号带宽, 则采样点数为 $L = \lceil \tau \times f_s \rceil$ 。采样结果为 $\mathbf{s} = [s(1) s(2) \cdots s(L)]^T$, $\dot{\mathbf{s}} = [\dot{s}(1) \dot{s}(2) \cdots \dot{s}(L)]^T$ 和 $\ddot{\mathbf{s}} = [\ddot{s}(1) \ddot{s}(2) \cdots \ddot{s}(L)]^T$, 以 \mathbf{n} 为高斯白噪声, $\mathbf{n} = [n(1) n(2) \cdots n(L)]^T$, 则式(2)对应的离散模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha_+ \mathbf{s} + \mathbf{n}, & H_0 \\ \mathbf{x} \approx \alpha_+ \mathbf{s} + \frac{\delta_t}{2} \alpha_- \dot{\mathbf{s}} + \frac{\delta_t^2}{8} \alpha_+ \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{n}, & H_1 \end{cases} \quad (3)$$

其中, H_0 假设($\delta_t = 0$)表示只存在一个目标, H_1 假设($\delta_t \neq 0$)表示存在两个目标。由于回波幅度未知, 该模型为复合假设检验模型, 存在未知参数 α_- , α_+ 和 δ_t 。

设向量 \mathbf{s} 构成的子空间对应的正交投影矩阵为 $\mathbf{P}_s^\perp = \mathbf{I}_L - \mathbf{s}(\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s}^H$, 对投影矩阵作特征分解, 取 $L-1$ 个不为0的特征值所对应的特征向量构成矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times (L-1)}$, 则有: $\mathbf{P}_s^\perp = \mathbf{U} \mathbf{U}^H$, $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_{L-1}$ 。令 $\mathbf{y} = \mathbf{U}^H \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{w} = \mathbf{U}^H \mathbf{n}$, 易知 $\mathbf{U}^H \mathbf{s} = \mathbf{0}$, 则式(3)可转化为如下标准检测模型:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{w}, & H_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{U}^H \dot{\mathbf{s}} \alpha_- \frac{\delta_t}{2} + \mathbf{U}^H \ddot{\mathbf{s}} \alpha_+ \frac{\delta_t^2}{8} + \mathbf{w}, & H_1 \end{cases} \quad (4)$$

定义

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\triangleq [\mathbf{U}^H \dot{\mathbf{s}} \quad \mathbf{U}^H \ddot{\mathbf{s}}] \in \mathbb{C}^{(L-1) \times 2} \\ \boldsymbol{\theta} &\triangleq [\alpha_- \delta_t / 2 \quad \alpha_+ \delta_t^2 / 8]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \end{aligned}$$

则上述模型可以进一步写为

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{w}, & H_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}, & H_1 \end{cases} \quad (5)$$

由于 $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_{L-1}$, 噪声 \mathbf{n} 为高斯白噪声, 即 $E(\mathbf{n} \mathbf{n}^H) = \sigma^2 \mathbf{I}_L$ 。因此: $E(\mathbf{w} \mathbf{w}^H) = E(\mathbf{U}^H \mathbf{n} \mathbf{n}^H \mathbf{U}) = \mathbf{U}^H E(\mathbf{n} \mathbf{n}^H) \mathbf{U} = \sigma^2 \mathbf{I}_{L-1}$, 即 \mathbf{w} 仍然为高斯白噪声。

3 分辨统计量及性能分析

当幅度参数 α_1, α_2 确定未知时, 最优检测器为广义似然比(Generalized Likelihood Ratio Test, GLRT)检测器, 需先求得未知幅度参数的最大似然估计(Maximum Likelihood Estimator, MLE), 再进行似然比检测。

从式(4)可以看出该模型是复信号的线性假设检验模型, 则根据统计信号处理相关知识^[7], GLRT对应的统计量为

$$T(\mathbf{y}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}^H (\mathbf{H}^H \mathbf{H}) \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sigma^2 / 2} \quad (6)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y}$ 为假设 H_1 下 $\boldsymbol{\theta}$ 的MLE^[18]。将 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代入式(6), 则可得到检测统计量为

$$T(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^H \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y}}{\sigma^2 / 2} = \frac{\mathbf{y}^H \mathbf{P}_H \mathbf{y}}{\sigma^2 / 2} \geq \gamma \quad (7)$$

其中, γ 为检测门限, 由给定的虚判概率确定。

一般来说, 采样点数 $L \gg 2$, 则从式(5)可得 $\text{rank}\{\mathbf{H}\} = 2$ 。记 $\mathbf{P}_H = \mathbf{H}(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$, 则有 $\text{rank}\{\mathbf{P}_H\} = 2$, 记 $P = \text{rank}\{\mathbf{P}_H\} = 2$, 进一步推导得到统计量的分布为^[17]

$$T(\mathbf{y}) = \frac{2 \mathbf{y}^H \mathbf{P}_H \mathbf{y}}{\sigma^2} \sim \begin{cases} \chi_{2P}^2, & H_0 \\ \chi_{2P}^2(\lambda), & H_1 \end{cases} \quad (8)$$

其中, χ_{2P}^2 和 $\chi_{2P}^2(\lambda)$ 分别为自由度 $2P$ 的中心和非中心卡方分布, 其中非中心参数 λ 为^[17]

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\theta}^H (\mathbf{H}^H \mathbf{H}) \boldsymbol{\theta} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{\delta_t}{2} \alpha_-^* \quad \frac{\delta_t^2}{8} \alpha_+^* \right] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \dot{\mathbf{s}} & \dot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \ddot{\mathbf{s}} \\ \ddot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \dot{\mathbf{s}} & \ddot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \ddot{\mathbf{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta_t}{2} \alpha_- \\ \frac{\delta_t^2}{8} \alpha_+ \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{\delta_t^2}{4} |\alpha_-|^2 (\dot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \dot{\mathbf{s}}) + \frac{\delta_t^4}{64} |\alpha_+|^2 (\ddot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \ddot{\mathbf{s}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_t^3}{8} \text{Re} \{ \alpha_-^* \alpha_+ (\dot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \ddot{\mathbf{s}}) \} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

定义信噪比为 $\rho_k = |\alpha_k|^2 / \sigma^2$, $k = 1, 2$ 。目标回波幅度相关系数记作 $c = (\alpha_1^* \alpha_2) / |\alpha_1| |\alpha_2| = c_R + j c_I$, 则式(9)可以进一步写为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\delta_t^2}{2} (\rho_1 + \rho_2 - 2 c_R \sqrt{\rho_1 \rho_2}) (\dot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \dot{\mathbf{s}}) \\ &\quad + \frac{\delta_t^3}{4} ((\rho_1 - \rho_2) \text{Re} (\dot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \ddot{\mathbf{s}}) \\ &\quad - 2 c_I \sqrt{\rho_1 \rho_2} \text{Im} (\dot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \ddot{\mathbf{s}})) \\ &\quad + \frac{\delta_t^4}{32} (\rho_1 + \rho_2 + 2 c_R \sqrt{\rho_1 \rho_2}) (\ddot{\mathbf{s}}^H \mathbf{P}_s^\perp \ddot{\mathbf{s}}) \end{aligned} \quad (10)$$

设 H_0 和 H_1 假设下统计量的概率密度函数(PDF)分别为 $f_{\chi_{2P}^2}(t)$ 和 $f_{\chi_{2P}^2(\lambda)}(t)$, 则根据右尾函数的定义^[17], 分辨概率和虚判概率可表示为

$$P_f = Q_{\chi_{2P}^2}(\gamma) = \int_{\gamma}^{\infty} f_{\chi_{2P}^2}(t) dt$$

$$P_d = Q_{\chi_{2P}^2(\lambda)}(\gamma) = \int_{\gamma}^{\infty} f_{\chi_{2P}^2(\lambda)}(t) dt$$

其中, $Q_{\chi_{2P}^2}(\gamma)$ 和 $Q_{\chi_{2P}^2(\lambda)}(\cdot)$ 分别为中心和非中心卡方分布的右尾概率函数。则给定虚判概率 P_f , 可求得门限 γ 和分辨概率 P_d 为

$$\gamma = Q_{\chi_{2P}^2}^{-1}(P_f) \quad (11)$$

$$P_d = Q_{\chi_{2P}^2(\lambda)}(\gamma) \quad (12)$$

其中, $Q_{\chi^2_{2P}}^{-1}(\cdot)$ 为 $Q_{\chi^2_{2P}}(\cdot)$ 的逆函数。

根据上述结果, 我们可以实现对雷达应用中两种典型分辨性能进行分析:

(1) 给定虚判概率 P_f , 波形 \mathbf{s} , 两个目标信噪比 ρ_1, ρ_2 和回波幅度的相关系数 c , 以及预设分辨下限 δ_t , 计算出对应的正确分辨概率 P_d 。步骤如下:

- (a) 根据 P_f , 由式(11)计算判断门限 γ ;
- (b) 根据 $\mathbf{s}, \rho_1, \rho_2, c$ 和 δ_t , 由式(10)计算非中心参数 λ ;
- (c) 根据 λ 和 γ , 由式(12)计算分辨概率 P_d 。

(2) 给定虚判概率 P_f 、分辨概率 P_d , 波形 \mathbf{s} , 两目标信噪比 ρ_1, ρ_2 和回波幅度相关系数 c , 计算能够实现的分辨下限 δ_t 。步骤如下:

- (a) 根据 P_f , 由式(11)计算判断门限 γ ;
- (b) 根据 γ 和 P_d , 由式(12)逆函数计算非中心参数 λ ;
- (c) 根据 $\lambda, \mathbf{s}, \rho_1, \rho_2, c$, 由式(10)逆函数计算分辨下限 δ_t 。

在第(2)种应用中, 第(c)步实际要求解式(10)表示的关于分辨限的一个一元四次方程, 由于一元四次方程的解存在解析表达^[19]故可直接求解, 这里我们取其4个根中绝对值最小的实数解作为 δ_t 。

4 仿真结果

本节仿真采用的波形为线性调频(LFM)信号, $s(t) = \text{rect}(t/\tau) e^{j\pi K t^2}, -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, K = B/\tau$, 带宽和时宽分别为 $B = 10^6$ Hz 和 $\tau = 10 \mu\text{s}$, 采用10倍带宽采样, 两信号距离间隔小于瑞利限, 信噪比定义为 $\text{SNR}_k = |\alpha_k|^2/\sigma^2, k=1, 2$, 两信号的幅度的相关系数 $c = (\alpha_1^* \alpha_2)/|\alpha_1| |\alpha_2|$, 从定义可以看出, 相关系数的模恒为1。虚判概率默认设为 $P_f = 0.001$ 。

仿真1 对比假设检验方法与匹配滤波的分辨效果如图2所示。参数为: 两幅度相位差为90度

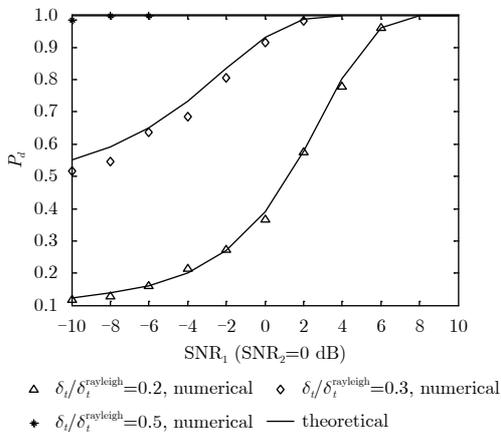


图2 假设检验和匹配滤波方法的分辨性能对比

Fig. 2 Comparisons of the hypothesis test and matched filter

(即: $c_R=0$)信号, 间隔分别为0.2, 0.3和0.5倍瑞利限。图2中关于假设检验方法的仿真, 保持一个信号的信噪比保持不变(0 dB), 另一个信号的信噪比从-10 dB到10 dB变化。其中分辨概率的数值解是通过每种信噪比进行1000次蒙特卡洛仿真, 根据式(7)计算统计量超过门限 γ 次数, 除以总次数得到。图3中的匹配滤波采用两信号的信噪比均为0 dB, 图中给出的是单次蒙特卡洛随机仿真的结果。

从图2(实线为理论分辨概率, 符号为数值分辨率)可看出不同分辨间隔下, 假设检验方法理论值和数值解基本一致, 说明我们的理论结果是正确的。且只要信噪比足够大, 该方法能够分辨瑞利限内的两近邻目标。而从图3可以看出(虚线表示两目标的真实位置), 匹配滤波不能分辨瑞利限内的两近邻目标。

仿真2 从式(10)可看出, 非中心参数 λ 与两信号幅度的相关系数有关。根据非中心卡方分布的知识^[17], 在给定虚判概率下, λ 与分辨概率呈现正相关关系, λ 越大则分辨性能越好。故可以推知分辨概率与相关系数有关。仿真设置两信噪比为0 dB等功率信号, 距离间隔为 $\delta_t/\delta_t^{\text{rayleigh}} = 0.4$, 变化相关系数 c , 相位从 $-\pi$ 到 π , 绘制分辨概率如图4所示。

从图4(a)可以得出, 分辨概率随两信号幅度相关系数 c 的相位呈对称分布, 当该相位差较大时分辨性能较好; 但当相位差较小时分辨性能较差, 当相位差为0时, 分辨概率也接近于0, 表明系统此时

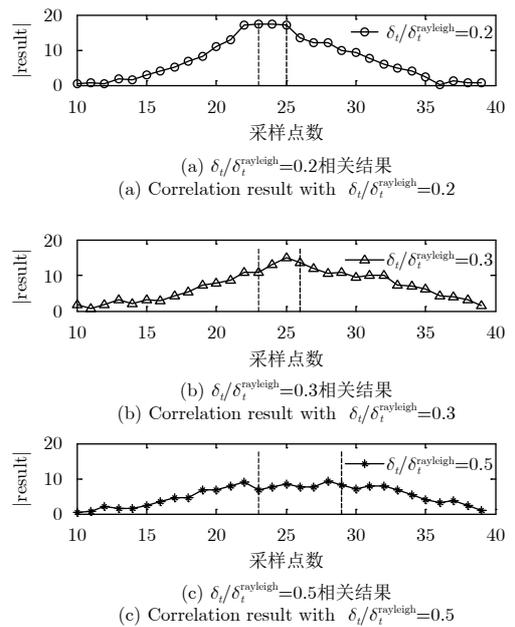


图3 匹配滤波方法的分辨性能

Fig. 3 Performance of matched filter

几乎没有分辨能力。从图4(b)和图4(c)可以看出,分辨性能随着实部和虚部的增加呈现单调减少/增加的关系。

仿真3 前已提及,分辨性能有2种评价方法,一是给定虚判概率、分辨限和波形参数,确定分辨概率的大小。二是给定虚判概率、分辨概率和波形参数,确定可达到的分辨下限。上面的仿真结果给出了第1种情况的结果。这里将考察第2种情况。假

定两幅度不相关信号($c = 0$),设定分辨概率为0.9,虚判概率为 $P_f = 0.001$,绘制分辨限随两个目标信噪比变化的情况如图5所示。

由图5(a)可以看出,和分辨概率相一致,统计分辨限随信噪比增加而降低,即分辨性能随信噪比增加而提高。从图5(b)可以看出,对于幅度不相关,信噪比为0 dB的两等功率信号,设定0.9, 0.8和0.5的分辨概率,则最高可达0.28, 0.26和0.21倍瑞利限。

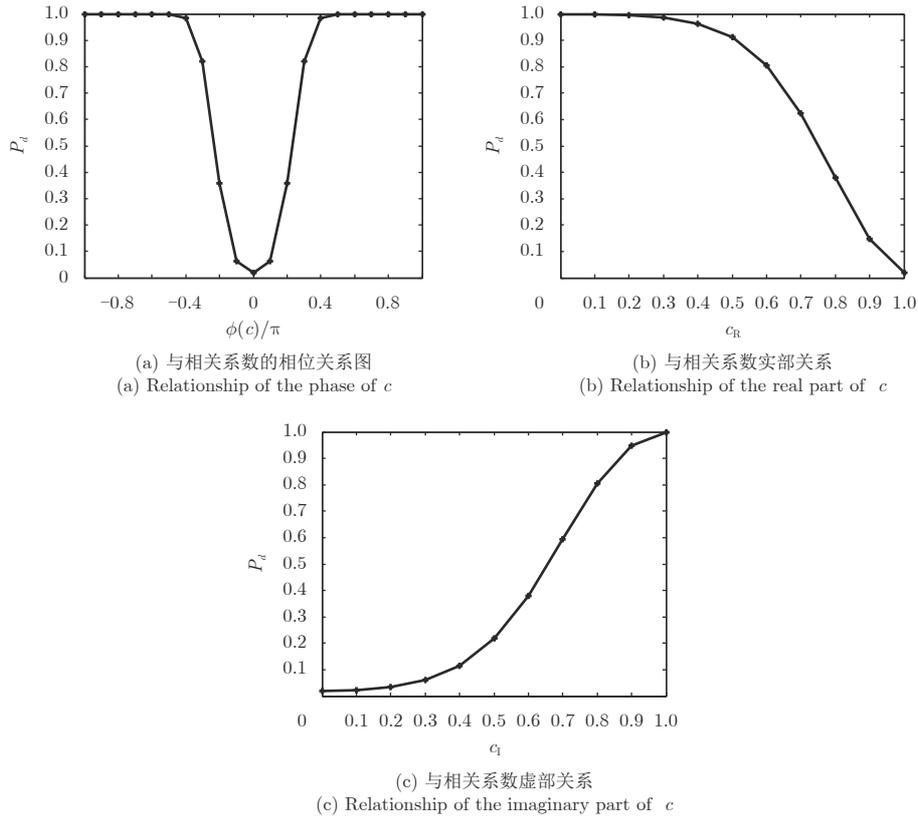


图 4 分辨概率与相关系数的关系

Fig. 4 Relationship of the resolution rate and the correlation coefficient

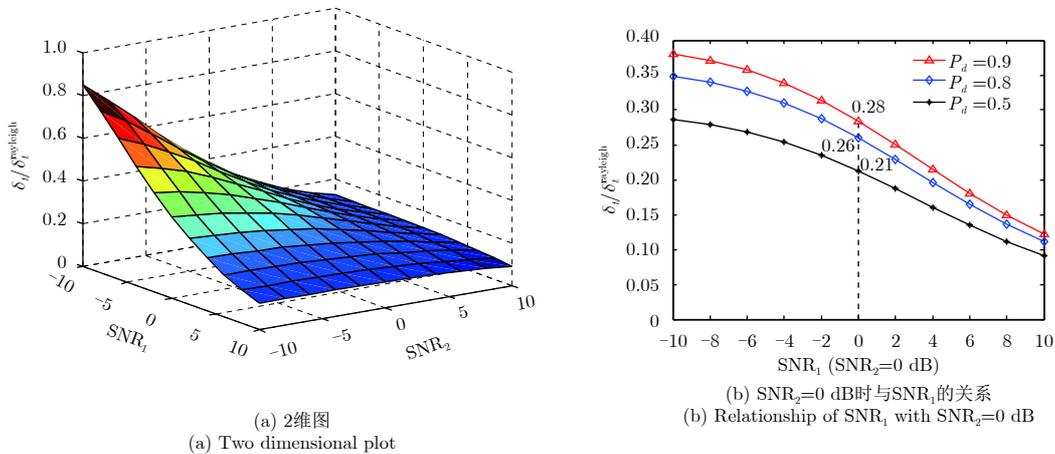


图 5 $P_d=0.9$ 时SRL与信噪比的关系

Fig. 5 Relationship of SRL and SNR with $P_d=0.9$

仿真4 仍假定两个幅度相位差为90度的0 dB等功率信号, 针对仿真2设置的条件, 绘制分辨限与分辨概率和虚判概率的关系, 如图6所示。

由图6(a)可以看出, 当虚判概率一定、要求的分辨概率越小时, 或者分辨概率一定、要求的虚判概率越大时, 统计分辨极限越小, 故分辨性能越好。从图6(b)和图6(c)可以看出, 当设定虚判概率为0.001和分辨概率为0.5时, 利用假设检验的分析方法, 分辨限最高可达0.3倍瑞利限。

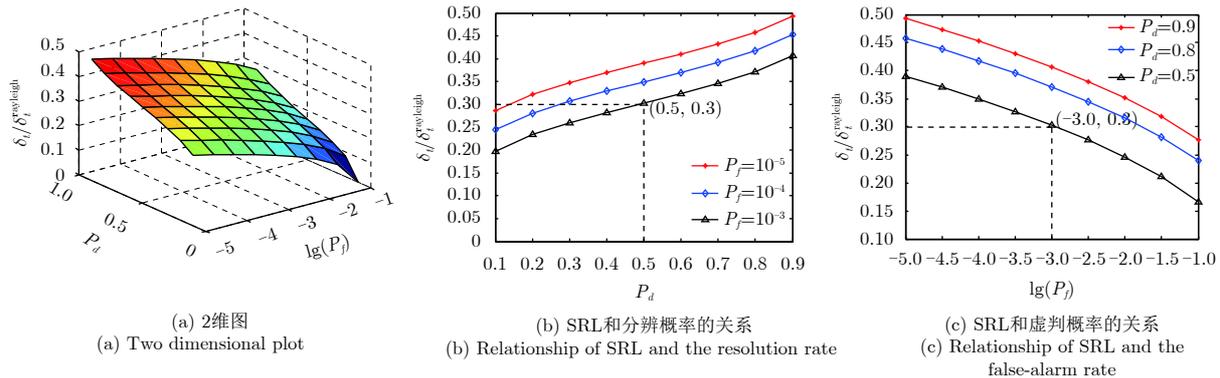


图 6 $SNR_1=SNR_2=0$ dB时SRL和分辨概率及虚判概率的关系

Fig. 6 Relationship of SRL and the resolution rate & the false-alarm rate with $SNR_1=SNR_2=0$ dB

本文利用线性调频信号进行了仿真, 从结果可以看出, 利用统计分辨限的分析方法可以实现对瑞利限的突破。在给定的分辨概率和虚判概率下, 两邻近目标的距离统计分辨限不仅与两信号的信噪比有关, 还与两信号回波的相关系数有关。分辨概率随信噪比增加而提高, 统计分辨下限随信噪比增加而降低。还可以看出, 相关系数的相位对分辨性能产生了影响。这些结论对于基于模糊函数的传统距离分辨性能分析方法均是有益补充, 对于解决雷达实际应用中强弱信号同时存在情况下的分辨难题具有参考意义。本文结果表明传统意义上的低分辨雷达实际具有可达到高分辨性能的很大潜力。

本文仅仿真了线性调频信号的情况, 为简化分析, 假定两目标回波的中心时刻已知。下面的工作将针对其他类型信号的分辨性能作进一步讨论, 并扩展到两目标距离中心值未知的情形以及多目标的情况。

参考文献

- [1] LEVANON N. Radar Principles[M]. New York: Wiley, 1998: 129–143.
- [2] WU X H, ZHU W P, and YAN J. A high-resolution DOA estimation method with a family of nonconvex penalties[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(6): 4925–4938. doi: 10.1109/TVT.2018.2817638.
- [3] SHEN F F, LIU Y M, LI X P, *et al.* High resolution DOA estimation based on Bayesian compressive sensing[C]. Proceedings of the 2017 2nd International Conference on Frontiers of Sensors Technologies, Shenzhen, China, 2017: 274–278. doi: 10.1109/ICFST.2017.8210518.
- [4] LI X Y, GUO S X, JIN L, *et al.* High-resolution DOA estimation for cooperation networks using space-time hopping[J]. *Electronics Letters*, 2016, 52(11): 978–980. doi: 10.1049/el.2015.4194.
- [5] LEE H B. The Cramer-rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(6): 1569–1572. doi: 10.1109/78.286979.
- [6] SMITH S T. Statistical resolution limits and the complexified Cramér-rao bound[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(5): 1597–1609. doi: 10.1109/TSP.2005.845426.
- [7] EL KORSO M N, BOYER R, RENAUX A, *et al.* Statistical resolution limit for multiple parameters of interest and for multiple signals[C]. Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Dallas, USA, 2010: 3602–3605. doi: 10.1109/ICASSP.2010.5495922.
- [8] BAO T, EL KORSO M N, and OUSLIMANI H H. Cramér-rao bound and statistical resolution limit investigation for near-field source localization[J]. *Digital Signal Processing*,

- 2016, 48: 137–147. doi: [10.1016/j.dsp.2015.09.019](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2015.09.019).
- [9] SHAHRAM M and MILANFAR P. On the resolvability of sinusoids with nearby frequencies in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2579–2588. doi: [10.1109/TSP.2005.845492](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.845492).
- [10] LIU Z and NEHORAI A. Statistical angular resolution limit for point sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5521–5527. doi: [10.1109/TSP.2007.898789](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.898789).
- [11] EL KORSO M N, BOYER R, RENAUX A, *et al.* On the asymptotic resolvability of two point sources in known subspace interference using a GLRT-based framework[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(10): 2471–2483. doi: [10.1016/j.sigpro.2012.03.011](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.03.011).
- [12] ZHU W, TANG J, and WAN S. Angular resolution limit of two closely-spaced point sources based on information theoretic criteria[C]. Proceedings of 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Florence, Italy, 2014: 86–90. doi: [10.1109/ICASSP.2014.6853563](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2014.6853563).
- [13] SUN M H, JIANG D D, SONG H B, *et al.* Statistical resolution limit analysis of two closely spaced signal sources using Rao test[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 22013–22022. doi: [10.1109/ACCESS.2017.2760885](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2760885).
- [14] THAMERI M, ABED-MERAIM K, FOROOZAN F, *et al.* On the Statistical Resolution Limit (SRL) for time-reversal based MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2018, 144: 373–383. doi: [10.1016/j.sigpro.2017.10.029](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.10.029).
- [15] SHAHRAM M and MILANFAR P. Imaging below the diffraction limit: A statistical analysis[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(5): 677–689. doi: [10.1109/TIP.2004.826096](https://doi.org/10.1109/TIP.2004.826096).
- [16] SHAHRAM M and MILANFAR P. Statistical and information-theoretic analysis of resolution in imaging[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(8): 3411–3437. doi: [10.1109/TIT.2006.878180](https://doi.org/10.1109/TIT.2006.878180).
- [17] KAY S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1998.
- [18] KAY S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [19] CARDANO G. Ars Magna or the Rules of Algebra[M]. Mineola: Dover, 1993.

作者简介



张云雷(1981–), 男, 河北晋州人, 海军工程大学讲师, 现为清华大学电子工程系在读博士生, 研究方向为MIMO雷达信号处理和波形设计、软件化雷达等。
E-mail: zhangyunlei04@163.com



王力(1983–), 男, 四川宜宾人, 清华大学电子工程系在读博士生, 主要研究方向为目标跟踪和MIMO雷达波形设计。
E-mail: wangli_apple@163.com



汤俊(1973–), 男, 江苏南京人, 博士, 教授, 2000年在清华大学电子工程系获得博士学位, 现为清华大学电子工程系教授, 研究方向为阵列信号处理、MIMO雷达信号处理、软件化雷达等, 目前发表文章百余篇。

E-mail: tangj_ee@tsinghua.edu.cn