

## 基于凸优化方法的认知雷达低峰均比波形设计

郝天铎<sup>\*①</sup> 崔琛<sup>①</sup> 龚阳<sup>①</sup> 孙从易<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(国防科技大学电子对抗学院 合肥 230037)

<sup>②</sup>(96630部队 北京 102206)

**摘要:** 为了提高雷达发射波形的检测性能,同时使发射机发挥其最大效能,以发射波形的低峰均比(PAR)为约束条件,该文提出了一种信号相关杂波背景下的认知雷达发射波形和接收机滤波器联合优化方法。首先,面向距离扩展目标检测问题,构建关于雷达输出信干噪比(SINR)的优化模型;然后将该模型转化为Rayleigh商形式,给出了接收机权值的解析表达式;在此基础上,通过半正定松弛,将关于发射波形半正定矩阵的非凸问题转化为凸问题,求得发射波形的最优矩阵解;最后,将秩1近似法和最近邻方法相结合,从最优矩阵解中提取出发射波形的最优向量解。该方法在给定PAR取值范围内可使波形的输出SINR达到最大,PAR=2时波形的SINR值与能量约束下优化波形的SINR值相同,并且比PAR=1时所得波形高出约0.5 dB。仿真结果验证了所提方法的有效性。

**关键词:** 认知雷达; 波形设计; 峰均比(PAR); 凸优化; 半正定松弛(SDR)

中图分类号: TN958

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2018)04-0498-09

DOI: 10.12000/JR18002

**引用格式:** 郝天铎, 崔琛, 龚阳, 等. 基于凸优化方法的认知雷达低峰均比波形设计[J]. 雷达学报, 2018, 7(4): 498-506. DOI: 10.12000/JR18002.

**Reference format:** Hao Tianduo, Cui Chen, Gong Yang, *et al.*. Waveform design for cognitive radar under low PAR constraints by convex optimization[J]. *Journal of Radars*, 2018, 7(4): 498-506. DOI: 10.12000/JR18002.

## Waveform Design for Cognitive Radar Under Low PAR Constraints by Convex Optimization

Hao Tianduo<sup>①</sup> Cui Chen<sup>①</sup> Gong Yang<sup>①</sup> Sun Congyi<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(*Institute of Electronic Countermeasure, National University of Defense Technology, Hefei 230037, China*)

<sup>②</sup>(*Unit 96630, Beijing 102206, China*)

**Abstract:** To improve the detection performance of the radar transmit waveform while enabling the transmitter to perform at its maximal efficiency, a joint design method is proposed for the transmit and receive filter in the presence of signal-dependent clutter with a Peak-to-Average-power Ratio (PAR) constraint of the transmit waveform. First, an optimized model of the radar's output Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio (SINR) for range-extended target detection is established. Second, the analytic expression of the receiver is obtained by converting the optimization problem into the Rayleigh quotient model. The optimal matrix solution is then obtained by transforming the non-convex problem into a convex problem via the semi-definite matrix of the waveform. Finally, the optimal vector solution of the waveform is extracted from the optimal matrix solution by combining the rank-one approximation method combined with the nearest neighbor method. An optimal waveform with a maximal output SINR for a given PAR range is obtained using the proposed method. The SINR value of the waveform when PAR = 2 is the same as the SINR value of the optimized waveform under the energy constraint and is about 0.5 dB higher than the waveform when PAR = 1. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Cognitive radar; Waveform design; Peak-to-Average power Ratio (PAR); Convex optimization; Semi-Definite Relaxation (SDR)

收稿日期: 2018-01-02; 改回日期: 2018-04-23; 网络出版: 2018-06-04

\*通信作者: 郝天铎 haotianduo0423@126.com

基金项目: 国家部委基金

Foundation Item: The National Ministries Foundation

## 1 引言

认知雷达是一种智能化雷达,可以根据对环境 和目标信息的认知自适应地调整发射波形,是未来 雷达的发展趋势之一<sup>[1,2]</sup>。认知雷达的发射波形不 仅与其所面向的任务有关,而且也受某些约束条件 的限制。现阶段,在进行面向检测的波形设计时, 大部分方法仅考虑了发射能量的约束,而未对所设 计信号的包络加以制约。在工程实际中,为了能够 使雷达发射机发挥其最大效能通常要求雷达发射波 形具有较低的峰均比(Peak-to-Average power Ratio, PAR)或者恒定包络<sup>[3,4]</sup>。然而,恒模约束又过于苛 刻,往往与雷达的检测或估计性能不能兼顾,与恒 模约束相比,PAR是一种更加泛化的约束,恒模 波形只是PAR=1时的一种特殊波形,低PAR约束 下的波形将具有更高的自由度<sup>[5-7]</sup>。

在信号相关杂波背景下进行检测波形设计时, 通常选择最大化信干噪比(Signal-to-Interference- plus-Noise Ratio, SINR)作为优化准则<sup>[8,9]</sup>。然而, 基于该准则进行发射波形和接收机滤波器联合设计 时,现有大部分方法主要将匹配滤波器(Matched Filter, MF)作为最佳接收机,而在相关杂波背景 下,采用失配滤波器(MisMatched Filter, MMF) 可以获得更优的性能。文献<sup>[10]</sup>对杂波背景下发射 波形和MMF的联合设计问题进行了研究,该方法 可以保证SINR逐渐递增并收敛于一个定值。但其 只对发射能量进行了约束,所求波形的包络不受限 制。为了增加恒模或者低PAR约束,文献<sup>[11-13]</sup> 采用凸优化方法,通过半正定松弛(Semi-Definite Relaxation, SDR)技术,对恒模和低PAR波形的优 化问题进行了研究。然而,上述文献中均未考虑信 号相关杂波对波形设计的影响。文献<sup>[14]</sup>弥补了这 方面的不足,在信号相关杂波背景下,将恒模波形 的求解引入到认知雷达中,通过SDR+高斯随机化 的方法,得到了针对扩展目标检测的最优恒模波 形,该波形通过较小的SINR损失即可换来发射机 效能的提高,但仍然存在以下不足:(1)只进行了 恒模约束下的波形设计,与恒模约束相比,PAR 约束下的波形将具有更高的自由度和更好的实用 性;(2)采用SDR得到最优波形矩阵解后,通过高 斯随机化的方法从该矩阵解中提取最优波形向量解 时,由于高斯随机化方法具有一定的随机性,需要 取较多的随机高斯变量才能以较高概率得到最优可 行解,因此算法运算量偏大。

综上,本文将波形的约束条件松弛为低PAR, 同时考虑信号相关杂波的影响,并且兼顾算法的运 算速率,提出了一种面向扩展目标检测的低PAR

发射波形和接收机MMF的联合设计方法。该方法 可同时兼顾波形的检测性能和放大器效能,在给 定的PAR范围内可使波形的输出SINR达到最大。此 外,本文采用秩1近似法结合最近邻方法<sup>[15]</sup>,取代 高斯随机化方法,进一步降低了算法运算量(详见 第4节分析)。仿真结果验证了所提方法理论分析 的正确性和算法的有效性。

## 2 信号模型

本文考虑相关杂波背景下针对扩展目标检测的 低PAR波形设计。目标的散射特性用目标冲激响 应(Target Impulse Response, TIR)表示,相关杂 波用杂波冲激响应(Clutter Impulse Response, CIR)表示。为方便起见,本文对单输入单输出 (Single Input Single Output, SISO)雷达进行研 究,主要在时域对离散的时间信号进行分析,信号 模型如图1所示。

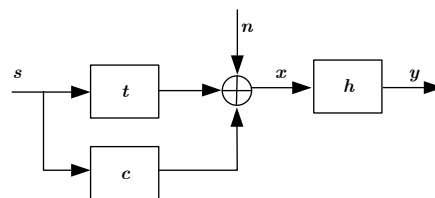


图1 相关杂波下的信号模型

Fig. 1 Signal model

图1中,  $s \in \mathbb{C}^{N_s \times 1}$  代表发射波形,  $N_s$  为发射波 形长度;  $t \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$  和  $c \in \mathbb{C}^{N_c \times 1}$  分别代表 TIR 和 CIR, 假定 TIR 和 CIR 长度相同<sup>[16]</sup>, 即  $N_t = N_c$ , 如果  $c(t)$  的时长大于  $t(t)$  (即  $N_c > N_t$ ), 本文拟采用 的处理方式是通过补零延拓的方法对 TIR 进行补 零处理, 使 TIR 和 CIR 的采样点个数相同。  $n \in \mathbb{C}^{N_n \times 1}$  代表噪声和干扰的总和,  $h$  表示接收 MMF 冲激响 应,  $x$  代表来自目标和环境的回波,  $y$  为滤波器输 出后的信号, 其长度  $N_y = N_h = N_s + N_t - 1$ 。该模 型可表示为:

$$\begin{aligned} x &= t * s + c * s + n = Ts + Cs + n \\ &= St + Sc + n = s_t + s_c + n \end{aligned} \quad (1)$$

$$y = h * x = Hx = Xh \quad (2)$$

其中, “\*” 代表卷积运算。  $s_t$  和  $s_c$  分别表示回波 中的目标信息部分和信号相关杂波部分,  $T, S, C, H$  与  $X$  表示对应向量的卷积矩阵, 这些矩阵 均为 Toeplitz 阵。以 TIR 为例, 令  $t = [t(1) \ t(2) \ \dots \ t(N_t)]^T$ , 则  $T = (t_1 \ t_2 \ \dots \ t_{N_s})$ , 其中,  $t_i = (\mathbf{0}_{i-1}^T, t^T, \mathbf{0}_{N_s-i}^T)^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_s$ ,  $\mathbf{0}_i$  代表  $i$  维零向量,  $(\cdot)^T$  代表转置, 可得:

$$T = \begin{bmatrix} t(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & t(1) & \ddots & \vdots \\ t(N_t) & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & t(N_t) & \ddots & t(1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t(N_t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N_s+N_t-1) \times N_s} \quad (3)$$

根据式(1)和式(2), 并令噪声和杂波的和为:

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}_c + \mathbf{n} \quad (4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{H}(\mathbf{s}_c + \mathbf{n}) = \mathbf{s}_{t,\mathbf{H}} + \mathbf{w}_\mathbf{H} \quad (5)$$

因此, 接收MMF输出信号的SINR可表示为:

$$\begin{aligned} \text{SINR} &= \frac{\mathbb{E}(\mathbf{s}_{t,\mathbf{H}}^H \mathbf{s}_{t,\mathbf{H}})}{\mathbb{E}(\mathbf{w}_\mathbf{H}^H \mathbf{w}_\mathbf{H})} \\ &= \frac{\mathbb{E}(\mathbf{s}_t^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{s}_t)}{\mathbb{E}(\mathbf{s}_c^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{s}_c) + \mathbb{E}(\mathbf{n}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{n})} \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\mathbb{E}$ 代表求均值。本文主要对确定TIR假设下的优化问题进行分析。

### 3 波形设计方法

#### 3.1 确定TIR假设下的问题描述

本小节主要采用循环迭代的思想对发射波形  $\mathbf{s}$  和接收机滤波器  $\mathbf{h}$  进行优化。由于本文主要侧重于最优波形和接收机滤波器的设计, 所以在后面的行文中假定TIR和CIR的先验知识可通过文献[17, 18]的方法获得。设  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{N_a \times 1}$ , 则有  $\mathbf{a}^H \mathbf{a} = \text{tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^H)$ ,  $\text{tr}(\cdot)$ 代表矩阵的迹。因此, 根据式(6), 在确定TIR假设下目标函数可表示为:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{s}, \mathbf{h}} \frac{\mathbf{t}^H \mathbf{S}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{t}}{\mathbb{E}(\text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{c} \mathbf{c}^H \mathbf{S}^H \mathbf{H}^H)) + \mathbb{E}(\text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{n} \mathbf{n}^H \mathbf{H}^H))} \\ &= \max_{\mathbf{s}, \mathbf{h}} \frac{\mathbf{t}^H \mathbf{S}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{t}}{\text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H \mathbf{H}^H) + \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{R}_n \mathbf{H}^H)} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{R}_n$ 和 $\mathbf{R}_c$ 分别为噪声和CIR的协方差矩阵, 可利用其特征值和特征向量进行表示:

$$\mathbf{R}_c = \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i(\mathbf{R}_c) \mathbf{u}_i(\mathbf{R}_c) \mathbf{u}_i^H(\mathbf{R}_c) \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{u}_i(\mathbf{R}_c)$ 代表矩阵 $\mathbf{R}_c$ 的第*i*个特征值 $\lambda_i(\mathbf{R}_c)$ 对应的特征向量。

假定 $\mathbf{h}$ 已知, 从式(7)中提取出 $\mathbf{s}$ , 根据卷积运算的互易性原则, 目标函数可变为:

$$\max_{\mathbf{s}} \frac{\mathbf{s}^H \boldsymbol{\Omega}_t(\mathbf{h}) \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H \boldsymbol{\Omega}_c(\mathbf{h}) \mathbf{s}} \quad (9)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Omega}_t(\mathbf{h}) = \mathbf{T} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{T} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_c(\mathbf{h}) &= \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i(\mathbf{R}_c) \mathbf{F}^H[\mathbf{u}_i(\mathbf{R}_c)] \\ &\quad \cdot \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{F}[\mathbf{u}_i(\mathbf{R}_c)] \\ &\quad + \left[ \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{R}_n \mathbf{H}^H) / P_s \right] \mathbf{I}_{N_s} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{F}$ 代表的是由向量到Toeplitz矩阵的映射,  $P_s$ 代表发射波形的最大能量值,  $\mathbf{I}_{N_s}$ 代表 $N_s \times N_s$ 的单位矩阵。

同理, 假定 $\mathbf{s}$ 已知, 提取 $\mathbf{h}$ , 式(7)可变形为:

$$\max_{\mathbf{h}} \frac{\mathbf{h}^H \boldsymbol{\Theta}_t(\mathbf{s}) \mathbf{h}}{\mathbf{h}^H \boldsymbol{\Theta}_c(\mathbf{s}) \mathbf{h}} \quad (12)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Theta}_t(\mathbf{s}) = \mathbf{F}^H(\mathbf{S} \mathbf{t}) \mathbf{F}(\mathbf{S} \mathbf{t}) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_c(\mathbf{s}) &= \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i(\mathbf{R}_c) \mathbf{F}^H[\mathbf{S} \mathbf{u}_i(\mathbf{R}_c)] \mathbf{F}[\mathbf{S} \mathbf{u}_i(\mathbf{R}_c)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_x} \lambda_i(\mathbf{R}_n) \mathbf{F}^H[\mathbf{u}_i(\mathbf{R}_n)] \mathbf{F}[\mathbf{u}_i(\mathbf{R}_n)] \end{aligned} \quad (14)$$

当 $\mathbf{s}$ 仅受能量约束且 $\mathbf{s}$ 已知时, 式(12)可看做经典的广义Rayleigh商问题<sup>[19]</sup>, 可得 $\mathbf{h}$ 的优化解为:

$$\mathbf{h} = \sqrt{P_h} \mathbf{u}_{\max}[\boldsymbol{\Theta}_c^{-1}(\mathbf{s}) \boldsymbol{\Theta}_t(\mathbf{s})] \quad (15)$$

其中,  $P_h$ 代表对接收机滤波器冲激响应的限制,  $\mathbf{u}_{\max}[\boldsymbol{\Theta}_c^{-1}(\mathbf{s}) \boldsymbol{\Theta}_t(\mathbf{s})]$ 代表矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_c^{-1}(\mathbf{s}) \boldsymbol{\Theta}_t(\mathbf{s})$ 最大特征值对应的特征向量。同理, 当 $\mathbf{h}$ 已知时, 可得式(9)中发射波形的最优解为:

$$\mathbf{s} = \sqrt{P_s} \mathbf{u}_{\max}[\boldsymbol{\Omega}_c^{-1}(\mathbf{h}) \boldsymbol{\Omega}_t(\mathbf{h})] \quad (16)$$

然而, 考虑到实际的工程需求, 当约束条件变为恒模或者低PAR时, 问题就变得复杂起来。

#### 3.2 低PAR波形设计

实际雷达系统中, 发射波形的总能量是有限的, 不失一般性, 设发射波形的最大能量不超过 $N_s$ , 则PAR可定义为:

$$\text{PAR}(\mathbf{s}) \triangleq \frac{\max_k |\mathbf{s}_k|^2}{\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |\mathbf{s}_k|^2} = \max_k |\mathbf{s}_k|^2 \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{s}_k$ 为 $\mathbf{s}$ 的第*k*个采样。当 $\mathbf{h}$ 已知时, 以式(9)为目标函数的优化问题可表示为:

$$\left. \begin{aligned} &\max_{\mathbf{s}} \frac{\mathbf{s}^H \boldsymbol{\Omega}_t(\mathbf{h}) \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H \boldsymbol{\Omega}_c(\mathbf{h}) \mathbf{s}} \\ &\text{s.t. } \text{PAR}(\mathbf{s}) \leq \mu, \quad \mu \in [1, N_s] \\ &\|\mathbf{s}\|^2 \leq N_s \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中, 当 $\mu = N_s$ 时, 等价于能量约束, PAR就成了冗余约束, 式(16)即为最优解; 当 $\mu = 1$ 时, 等价于恒模约束。由于问题式(18)的目标函数为非凸问题, 并且又有PAR的约束, 使得该问题成为NP-hard问题。由于式中的 $\Omega_t(\mathbf{h})$ 和 $\Omega_c(\mathbf{h})$ 均为对称矩阵, 令 $\mathbf{W} = \mathbf{s}\mathbf{s}^H$ , 此时 $\mathbf{C}$ 为半正定矩阵, 因此可将该问题转化为半正定规划(Semi-Definite Programming, SDP)问题进行求解。令 $\Omega_1 = \Omega_t(\mathbf{h})$ ,  $\Omega_2 = \Omega_c(\mathbf{h})$ , 又由于 $\mathbf{s}^H \Omega \mathbf{s} = \text{tr}(\Omega \mathbf{s}\mathbf{s}^H)$ , 则式(18)可转化为:

$$\left. \begin{aligned} & \max_{\mathbf{W}} \frac{\text{tr}(\Omega_1 \mathbf{W})}{\text{tr}(\Omega_2 \mathbf{W})} \\ & \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{W}) \leq \mu, \\ & \quad \text{tr}(\mathbf{W}) \leq N_s, \quad \mathbf{W} \succeq 0, \quad \text{rank}(\mathbf{W}) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中,  $\text{diag}(\cdot)$ 代表矩阵的对角线元素,  $\text{rank}(\cdot)$ 代表矩阵的秩,  $\mathbf{W} \succeq 0$ 表示 $\mathbf{W}$ 为半正定矩阵。然而, 式(19)仍然不是一个凸问题, 可以通过SDR<sup>[20]</sup>技术, 先把 $\text{rank}(\mathbf{W}) = 1$ 的约束去掉, 此时问题变为:

$$\left. \begin{aligned} & \max_{\mathbf{W}} \frac{\text{tr}(\Omega_1 \mathbf{W})}{\text{tr}(\Omega_2 \mathbf{W})} \\ & \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{W}) \leq \mu, \\ & \quad \text{tr}(\mathbf{W}) \leq N_s, \quad \mathbf{W} \succeq 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

接下来, 需要对目标函数进行等量代换, 使其转化为凸函数。由于 $\text{tr}(\Omega_1 \mathbf{W})$ 的值为一常数, 可令 $\text{tr}(\Omega_1 \mathbf{W}) = q$ ,  $\mathbf{W}' = \mathbf{W}/q$ , 则有

$$\text{tr}(\Omega_1 \mathbf{W}') = \text{tr}(\Omega_1 \mathbf{W}/q) = \text{tr}(\Omega_1 \mathbf{W})/q = 1 \quad (21)$$

由于仿射空间并不对除法运算封闭, 所以需要变量 $q$ 进行处理, 令 $p = 1/q$ 。此时, 以 $\mathbf{W}'$ 和 $p$ 为变量, 式(20)可以转化为:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{W}', p} \text{tr}(\Omega_2 \mathbf{W}') \\ & \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{W}') \leq \mu p, \\ & \quad \text{tr}(\mathbf{W}') \leq N_s p, \quad \mathbf{W}' \succeq 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中, 由于 $\mathbf{W}'$ 也是半正定矩阵, 式(22)也就变成了一个凸问题, 该凸问题有成熟的求解方法, 实际使用中有相应的工具箱。设 $\mathbf{W}'_{\text{opt}}$ 和 $p_{\text{opt}}$ 为式(22)的最优解, 则 $q_{\text{opt}} = 1/p_{\text{opt}}$ , 可得式(20)的全局最优解为:

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \mathbf{W}'_{\text{opt}} q_{\text{opt}} = \mathbf{W}'_{\text{opt}} / p_{\text{opt}} \quad (23)$$

如果 $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ 的秩为1, 则可取 $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ 的第1列作为可行解 $\mathbf{s}_{\text{opt}}$ 。然而, 一般情况下, 经过SDR后 $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ 的秩并不为1<sup>[21]</sup>。若 $\text{rank}(\mathbf{W}_{\text{opt}}) > 1$ , 根据秩1近似法<sup>[20]</sup>, 可以令

$$\mathbf{W}_{\text{opt}}^* = \lambda_{\max}(\mathbf{W}_{\text{opt}}) \mathbf{u}_{\max}(\mathbf{W}_{\text{opt}}) \mathbf{u}_{\max}^H(\mathbf{W}_{\text{opt}}) \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{W}_{\text{opt}}^*$ 代表 $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ 的最大特征值与特征向量的乘积, 在 $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ 的所有特征值与对应特征向量乘积的组

合中,  $\mathbf{W}_{\text{opt}}^*$ 与 $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ 最为近似, 此时, 就可以选取 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{opt}} = \sqrt{p_s} \mathbf{u}_{\max}(\mathbf{W}_{\text{opt}})$ 作为式(18)的一个候选解。然而, 由于 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{opt}}$ 只是近似解, 其元素不一定满足PAR约束, 所以需进一步进行优化, 将该候选解映射为式(18)的最优可行解, 优化问题可表示为:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{s}} \left\| \mathbf{s} - \sqrt{p_s} \frac{\mathbf{u}_{\max}(\mathbf{W}_{\text{opt}})}{\|\mathbf{u}_{\max}(\mathbf{W}_{\text{opt}})\|_2} \right\|_2 \\ & \text{s.t. } \text{PAR}(\mathbf{s}) \leq \mu, \quad \|\mathbf{s}\|^2 \leq N_s \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

此时, 式(25)是一个凸问题, 该凸问题有成熟的求解方法, 实际使用中有相应的CVX工具箱<sup>[22]</sup>。但直接使用这些成熟的算法时, 其复杂度较高。由于式(25)的目标函数和约束条件的形式与文献<sup>[15]</sup>中的最近邻算法相同, 采用该算法可以对问题进行快速求解, 每一步迭代的运算复杂度为 $O(N_s^2)$  ( $N_s$ 为序列的码长), 远低于凸优化算法 $O(N_s^{4.5})$ 的运算复杂度。

综上, 基于凸优化的认知雷达低PAR波形设计算法可总结如下:

步骤1 令 $i = 0$ , 随机产生的复波形 $\mathbf{s}^{(i)}$ 作为初始发射波形, 设置门限值 $\tau$ 和最大迭代次数 $\kappa$ ;

步骤2 令 $i = i + 1$ , 计算 $\Theta_c(\mathbf{s})$ 和 $\Theta_t(\mathbf{s})$ , 通过式(15)求得最优接收MMF向量 $\mathbf{h}^{(i)}$ ;

步骤3 通过求解式(22)得到 $\mathbf{W}'_{\text{opt}}^{(i)}$ , 进而得到式(20)中经半正定松弛后的最优矩阵解 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{(i)}$ ;

步骤4 如果 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{(i)}$ 的秩为1, 直接提取 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{(i)}$ 的第1列作为发射波形的可行解 $\mathbf{s}^{(i)}$ ; 否则, 采用秩1近似法从 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{(i)}$ 提取近似解 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{opt}}^{(i)}$ , 将其代入式(25)利用最近邻算法得到可行解 $\mathbf{s}^{(i)}$ , 并计算 $\text{SINR}^{(i)}$ ;

步骤5 如果 $|\text{SINR}^{(i)} - \text{SINR}^{(i-1)}| < \tau$ 或者迭代的次数大于 $\kappa$ , 迭代停止, 否则返回步骤2。

## 4 算法性能分析

### 4.1 算法收敛性分析

本文算法通过对 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{h}$ 交替迭代进行寻优, 对于不同的初始 $\mathbf{s}$ 或者 $\mathbf{h}$ , 沿着 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{h}$ 方向的优化结果也是不同的。当初始波形 $\mathbf{s}_0$ 已知时, 算法会沿着 $\mathbf{s}_0$ 的方向求得 $\mathbf{h}_1$ 的最优值, 此时的 $\mathbf{h}_1$ 仅仅是 $\mathbf{s}_0$ 方向上的最优值, 而非全局最优值; 接下来又会沿着 $\mathbf{h}_1$ 的方向得到 $\mathbf{s}_1$ 的最优值, 如此交替迭代直到满足收敛条件为止。下面给出简要的证明, 令 $\text{SINR}^{(k)}$ 表示第 $k$ 次迭代后的输出SINR值, 则可得

$$\begin{aligned} \text{SINR}^{(k)} &= \text{SINR}(\mathbf{s}_k, \mathbf{h}_k) \leq \text{SINR}(\mathbf{s}_k, \mathbf{h}_{k+1}) \\ &\leq \text{SINR}(\mathbf{s}_{k+1}, \mathbf{h}_{k+1}) = \text{SINR}^{(k+1)} \end{aligned} \quad (26)$$

式中, 第1个不等式成立的原因是由于 $\mathbf{h}_{k+1}$ 是 $\mathbf{s}_k$ 方

向上的最优值，而第2个不等式成立的原因是由于  $\mathbf{s}_{k+1}$  是  $\mathbf{h}_{k+1}$  方向上的最优值。对于不同的初始发射波形，由于收敛的方向不同，循环迭代所得  $\mathbf{h}$  与  $\mathbf{s}$  “对”并不是唯一的。在交替迭代过程中，输出 SINR 是非递减的，所得  $\mathbf{h}$  与  $\mathbf{s}$  “对”虽然不一定是全局最优点，在大部分情况下，却至少可以保证是沿着初始方向上的局部最优点。

#### 4.2 算法复杂度分析

本文主要与文献[14]算法的运算复杂度进行对比。文献[14]采用 SDR+高斯随机算法，由于高斯分布的随机性，产生的随机变量越多，得到最优解的概率也就越大，该文献平均需要  $K=10000$  个随机变量才能得到较好的可行解，其算法复杂度为： $O(N_s^{3.5}) + O(N_s^2 K)$ 。本文的算法复杂度为： $O(N_s^{3.5}) + O(N_s^2)$ 。可以看出，本文算法复杂度的第2项要远小于文献算法的第2项。然而，值得说明的是，虽然本文算法在第2步中提高了运算速率，但主要运算量集中在第1步，因此总体而言在算法复杂度上与文献[14]相比只是略有提高，而本文算法的优势在于波形包络的自由度得到了提升。

### 5 实验仿真

假设发射波形和接收滤波器的长度  $N_s = N_h = 20$ ，约束条件参数  $P_s = P_h = 20$ 。TIR 和 CIR 的长度  $N_t = N_c = 20$ ，TIR 的数据  $\tilde{\mathbf{t}}$  取自文献[23]，设  $\mathbf{t} = \zeta_t \tilde{\mathbf{t}}$ ， $\zeta_t = 100$ 。CIR 服从均值为  $\mathbf{0}_{N_c}$ ，协方差矩阵为  $\mathbf{R}_c$  的圆对称复高斯分布，即  $\mathbf{c} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_{N_c}, \mathbf{R}_c)$ ，其中， $\mathbf{R}_c \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}$  表示维数为  $N_c \times N_c$  的非奇异 Hermitian 阵。假设 CIR 对应的随机过程是宽平稳的，由文献[24]可知，归一化的 CIR 协方差矩阵可表示为  $\mathbf{R}_{(c)} = \mathbf{U}_c \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{U}_c^H$ ，其中酉矩阵  $\mathbf{U}_c$  第  $k$  行第  $l$  列元素为归

一化的杂波协方差矩阵，可表示为  $\mathbf{R}_{(c)} = \mathbf{U}_c \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{U}_c^H$ ，则  $\mathbf{R}_0 = \sigma_c^2 \mathbf{R}_{(c)}$ ，其中  $\sigma_c^2 = 1$ ， $\mathbf{\Lambda}_c \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}$  为对角阵，其对角元素为归一化杂波功率谱密度的采样，其值等于在频率间隔  $[0,1]$  上的等间隔采样，代表的是某个距离单元内杂波随时间的变化特性； $\mathbf{U}_c$  为酉矩阵，第  $k$  行第  $l$  列元素为：

$$\frac{1}{\sqrt{N_c}} \exp \left[ \frac{-j2\pi(k-1)(l-1)}{N_c} \right], \quad \forall k, l \in (1, N_c) \quad (27)$$

归一化的 TIR 和 CIR 协方差矩阵如图 2 所示。为便于分析，令噪声为高斯白噪声，其协方差矩阵为  $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_x}$ ，其中  $\sigma_n^2 = 0.1$ 。

#### 5.1 算法的有效性验证

令 PAR=1，初始波形为随机的相位编码波形，比较算法中波形最优矩阵解和波形最优向量解的检测性能，如图 3(a) 所示。可以看出，随着迭代次数的增加，二者均递增收敛，且后者的检测性能要略差于前者，这是因为从矩阵解转化为向量解时，还需要再进行一次 PAR 的约束，缩小了可行解的求解区域。图 3(b) 验证了不同初始波形对算法的影响。其中，优化复高斯包络初始波形和优化随机相位编码波形是通过文献[10]中的算法 1，将其进行进一步优化而得到的初始波形。可以看出，优化初始波形的收敛速度和初始 SINR 都要更优；此外，线性调频 (Linear Frequency Modulation, LFM) 信号的性能较差。这表明算法对初始值是敏感的，为了提高收敛速率可选择性能较好的波形作为初始发射波形。

图 4 将本文算法与现有算法进行了对比。设门限  $\tau=10^{-6}$ ，最大迭代次数  $\kappa=1000$ ，分别与文献[14]中的恒模波形、文献[10]中能量约束下的最优波

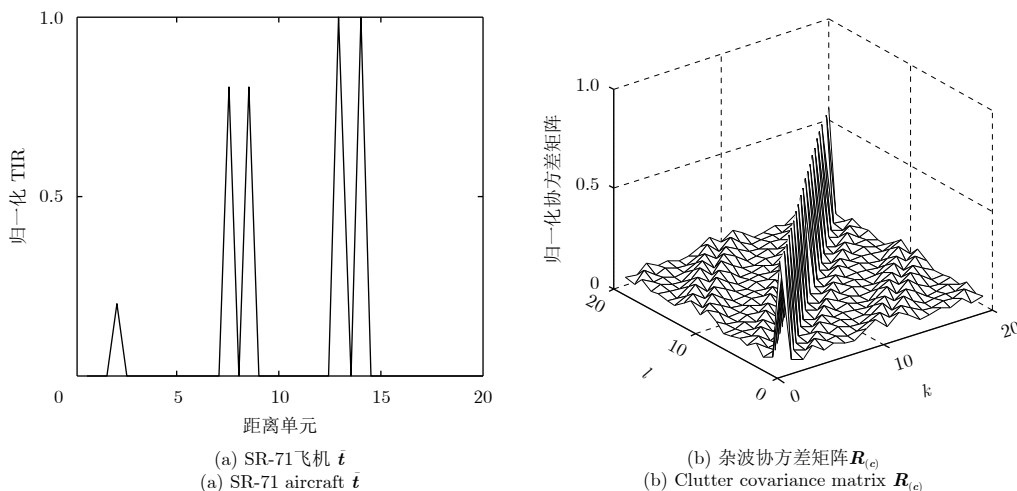


图 2 确定 TIR 和随机 CIR

Fig. 2 Determinate TIR and random CIR

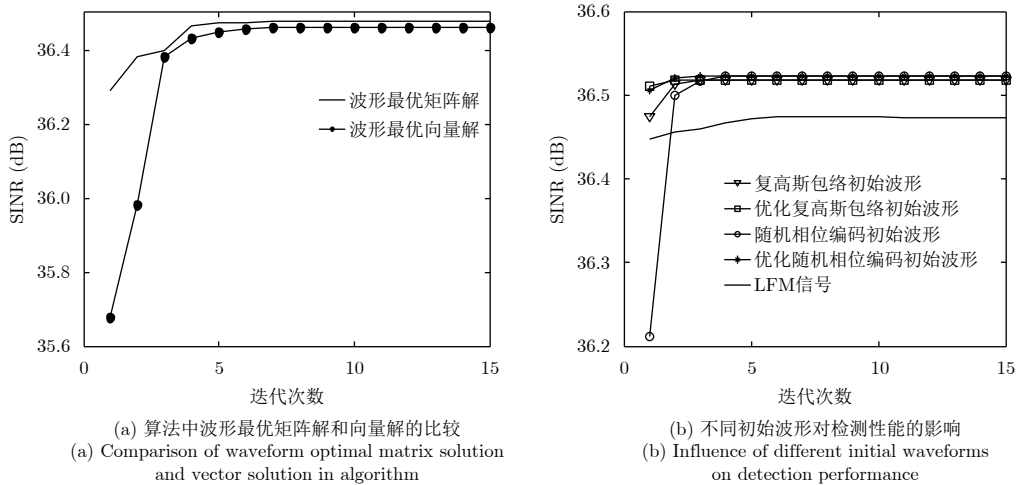


图 3 随迭代次数的算法性能分析  
Fig. 3 Algorithm performance analysis with iterations

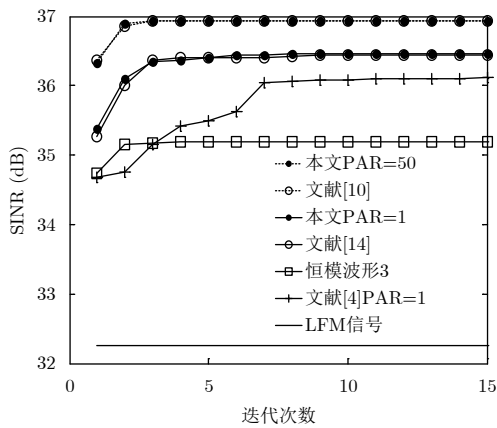


图 4 不同算法信干噪比随着迭代次数变化的曲线  
Fig. 4 Comparison of the SINR for different algorithms with iterations

形、恒模波形(恒模波形3)、文献[4]中频域设计的最优波形以及LFM信号进行比较。可以看出，在恒模波形中，文献[14]和本文波形性能相当，恒模

波形3的性能最差，这是因为其直接提取能量约束下最优波形的相位而成为恒模波形，并非最优的恒模波形；此外，本文算法性能要优于文献[4]，这是因为文献[4]频域波形不含有相位信息，变换到时域时会带来检测性能的下降；文献[10]算法是能量约束下的最优波形，本文产生的恒模波形的SINR与其相差约0.5 dB，这是因为能量约束下有着更高的包络自由度，此外，本文算法要明显好于LFM信号，而且本文方法可设计PAR在1~50之间的任意波形，这说明了本文方法对波形包络设计的灵活性。

图5在不同杂噪比(Clutter-to-Noise Ratio, CNR)下对各种算法进行比较。图5(b)是图5(a)的放大。由于在PAR=1时，本文方法与文献[14]性能较为接近，故在该仿真中不与文献[14]作比较。可以看出，随着CNR的增大，本文方法产生的恒模波形检测性能优于文献[4]和恒模波形3，验证了本文算法的有效性。

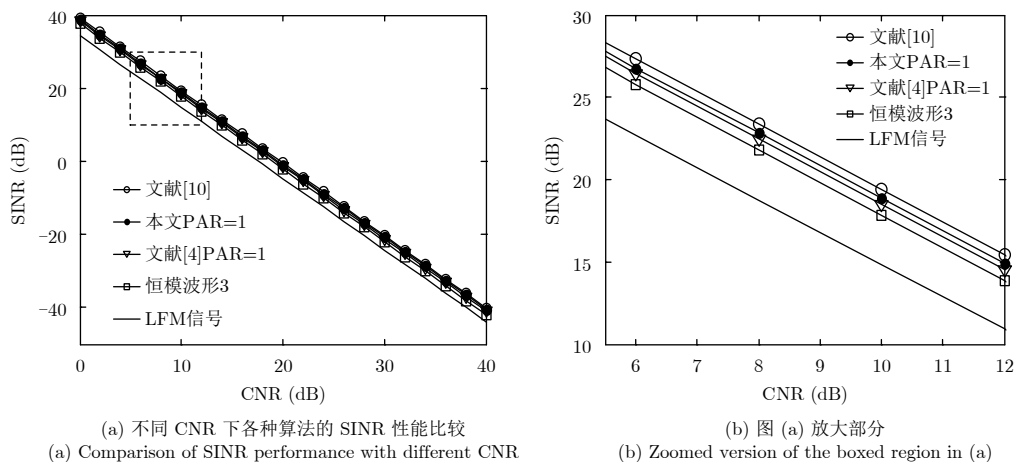


图 5 不同算法信干噪比随着CNR变化的曲线  
Fig. 5 Comparison of the SINR for different algorithms with different CNR

## 5.2 算法的性能与PAR之间的关系

图6对不同PAR(1.0, 1.3, 1.6, 2.0, 2.6, 3.0)下优化波形的输出SINR进行了比较, 图中每条实线对应着不同的PAR, 随着箭头的指向PAR的值由1.0增大到3.0。可以看出, 随着PAR的增大, 式(18)的可行解区域也变大, 因此输出SINR不仅收敛速度更快, 而且最终收敛值也会相应变大。当 $PAR > 2$ 时, 得到的SINR最终收敛于同一值, 接近能量约束下SINR的上限。图7为不同PAR波形实部和虚部的表示,  $PAR = N_s$ 代表能量约束下的波形, 其中点的分布半径较大, 说明波形幅度起伏较大, 不能保证所设计波形的恒模特性, 不利于实际应用。当 $PAR = 1$ 时, 本文方法产生的点位于单位圆上, 产生的是恒模波形; 而当 $PAR = 2$ 时, 点的分布半径与 $PAR = N_s$ 相比较小, 然而, 由前面分析可知,  $PAR = 2$ 时波形的检测性能已经与能量约束下波形较为接近, 因此低PAR下产生的波形实用性较强。

## 6 结论

针对传统雷达波形设计中发射机发射功率

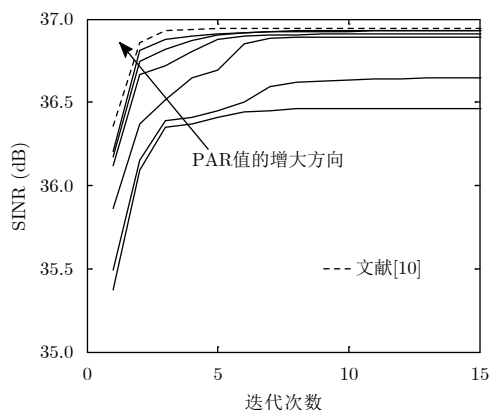


图 6 本文算法不同PAR下的信干噪比性能对比

Fig. 6 Comparison of the SINR vs different PAR

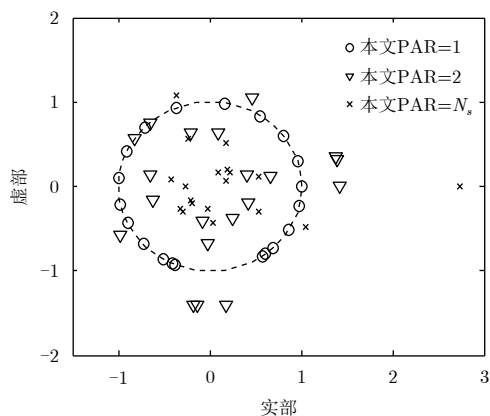


图 7 不同PAR波形的实部和虚部

Fig. 7 Real and imaginary parts of different PAR

不被充分利用的问题, 以PAR为约束条件, 从时域出发, 在信号相关杂波背景下, 提出了一种低PAR发射波形和接收机联合设计方法。相比现有方法, 本文方法可以实现任意PAR下的联合设计。理论分析和仿真实验表明, 通过将非凸问题转化为凸问题, 可以有效提高相关杂波背景下距离扩展目标的检测性能; 随着PAR的增大, 波形性能逐渐接近能量约束下的曲线; 相比于高斯随机法, 通过将秩1近似法和最近邻算法相结合, 可以在波形性能保持相当的情况下使算法复杂度进一步降低。值得注意的是, 本文分析了确定TIR和随机CIR假设下的优化问题, 对其他形式的TIR和CIR的组合, 算法同样适用。

## 参 考 文 献

- [1] Haykin S. Cognitive radar: A way of the future[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2006, 23(1): 30–40. DOI: [10.1109/MSP.2006.1593335](https://doi.org/10.1109/MSP.2006.1593335).
- [2] Guerci J R. Cognitive Radar: The Knowledge-Aided Fully Adaptive Approach[M]. Norwood, MA: Artech House, Inc., 2010: 13–30.
- [3] Wang Z J, Babu P, and Palomar D P. Design of PAR-constrained sequences for MIMO channel estimation via majorization-minimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(23): 6132–6144. DOI: [10.1109/TSP.2016.2607181](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2607181).
- [4] Stoica P, He H, and Li J. Optimization of the receive filter and transmit sequence for active sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(4): 1730–1740. DOI: [10.1109/TSP.2011.2179652](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2179652).
- [5] 唐波, 张玉, 李科, 等. 杂波中MIMO雷达恒模波形及接收机联合优化算法研究[J]. *电子学报*, 2014, 42(9): 1705–1711. DOI: [10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.007](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.007).  
Tang Bo, Zhang Yu, Li Ke, et al. Joint constant-envelope waveform and receiver design for MIMO radar in the presence of clutter[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(9): 1705–1711. DOI: [10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.007](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.007).
- [6] 郝天铎, 周青松, 孙从易, 等. 非准确先验知识下认知雷达低峰均比稳健波形设计[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(3): 532–540. DOI: [10.11999/JEIT170560](https://doi.org/10.11999/JEIT170560).  
Hao Tian-duo, Zhou Qing-song, Sun Cong-yi, et al. Low-PAR robust waveform design for cognitive radar with imprecise prior knowledge[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(3): 532–540. DOI: [10.11999/JEIT170560](https://doi.org/10.11999/JEIT170560).
- [7] Sen S. Characterizations of PAPR-constrained radar waveforms for optimal target detection[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2014, 14(5): 1647–1653. DOI: [10.1109/JSEN.2014.2348888](https://doi.org/10.1109/JSEN.2014.2348888).

- 2014.2299283.
- [8] Bell M R. Information theory and radar waveform design[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993, 39(5): 1578–1597. DOI: [10.1109/18.259642](https://doi.org/10.1109/18.259642).
- [9] Tang B and Tang J. Robust waveform design of wideband cognitive radar for extended target detection[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Shanghai, China, 2016: 3096–3100. DOI: [10.1109/ICASSP.2016.7472247](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472247).
- [10] Chen C Y and Vaidyanathan P P. MIMO radar waveform optimization with prior information of the extended target and clutter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(9): 3533–3544. DOI: [10.1109/TSP.2009.2021632](https://doi.org/10.1109/TSP.2009.2021632).
- [11] Chen X X, Deng X B, and Hao Z M. Waveform design for extended target detection under a peak to average power ratio constraint[C]. Proceedings of 2016 CIE International Conference on Radar, Guangzhou, China, 2016: 1–4. DOI: [10.1109/RADAR.2016.8059566](https://doi.org/10.1109/RADAR.2016.8059566).
- [12] Tang Y H, Zhang Y D, Amin M G, *et al.* Wideband multiple-input multiple-output radar waveform design with low peak-to-average ratio constraint[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2016, 10(2): 325–332. DOI: [10.1049/iet-rsn.2015.0189](https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2015.0189).
- [13] Gorji A A and Adve R S. Waveform optimization for random-phase radar signals with PAPR constraints[C]. IEEE International Radar Conference, Lille, France, 2014: 1–5. DOI: [10.1109/RADAR.2014.7060340](https://doi.org/10.1109/RADAR.2014.7060340).
- [14] Yue W Z, Zhang Y, Liu Y M, *et al.* Radar constant-modulus waveform design with prior information of the extended target and clutter[J]. *Sensors*, 2016, 16(6): 889. DOI: [10.3390/s16060889](https://doi.org/10.3390/s16060889).
- [15] 唐波. 宽带认知雷达低峰均比波形快速设计算法[J]. *航空学报*, 2016, 37(2): 688–694. DOI: [10.7527/S1000-6893.2015.0125](https://doi.org/10.7527/S1000-6893.2015.0125).
- Tang B. Efficient design algorithm of low PAR waveform for wideband cognitive radar[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2016, 37(2): 688–694. DOI: [10.7527/S1000-6893.2015.0125](https://doi.org/10.7527/S1000-6893.2015.0125).
- [16] Romero R A, Bae J, and Goodman N A. Theory and application of SNR and mutual information matched illumination waveforms[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(2): 912–927. DOI: [10.1109/TAES.2011.5751234](https://doi.org/10.1109/TAES.2011.5751234).
- [17] Chen P, Qi C H, Wu L N, *et al.* Estimation of extended targets based on compressed sensing in cognitive radar system[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2017, 66(2): 941–951. DOI: [10.1109/TVT.2016.2565518](https://doi.org/10.1109/TVT.2016.2565518).
- [18] 邹鲲, 廖桂生, 李军. 复合高斯杂波中知识辅助检测器的先验信息感知方法[J]. *中国科学: 信息科学*, 2014, 44(8): 993–1003. DOI: [10.1360/N112013-00116](https://doi.org/10.1360/N112013-00116).
- Zou Kun, Liao Gui-sheng, and Li Jun. Prior information cognitive method for knowledge aided detector in compound Gaussian clutter[J]. *Scientia Sinica Informationis*, 2014, 44(8): 993–1003. DOI: [10.1360/N112013-00116](https://doi.org/10.1360/N112013-00116).
- [19] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 第2版, 北京: 清华大学出版社, 2013: 447–450.
- Zhang Xian-da. *Matrix Analysis and Application*[M]. Second Edition, Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 447–450.
- [20] Luo Z Q, Ma W K, So A M C, *et al.* Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, 27(3): 20–34. DOI: [10.1109/MSP.2010.936019](https://doi.org/10.1109/MSP.2010.936019).
- [21] Yue W Z, Zhang Y, and Xie J W. Radar constant-modulus waveform design for multiple extended targets[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2017, E100-A(3): 888–892. DOI: [10.1587/transfun.E100.A.888](https://doi.org/10.1587/transfun.E100.A.888).
- [22] Grant M and Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming (Web page and software) 2008[EB/OL]. <http://cvxr.com/cvx/>.
- [23] Leshem A, Naparstek O, and Nehorai A. Information theoretic adaptive radar waveform design for multiple extended targets[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(1): 42–55. DOI: [10.1109/JSTSP.2007.897047](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2007.897047).
- [24] Yang Y and Blum R S. MIMO radar waveform design based on mutual information and minimum mean-square error estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(1): 330–343. DOI: [10.1109/TAES.2007.357137](https://doi.org/10.1109/TAES.2007.357137).



### 作者简介



郝天铎(1989-), 男, 内蒙古呼和浩特人, 国防科技大学电子对抗学院博士生, 主要研究方向为认知雷达信号处理和最优化理论。

E-mail: haotianduo0423@126.com



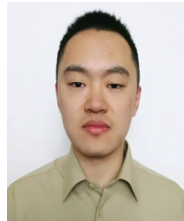
龚 阳(1992-), 男, 湖北随州人, 国防科技大学电子对抗学院博士生, 主要研究方向为雷达信号处理。

E-mail: 13156527915@163.com



崔 琛(1962-), 男, 河北易县人, 国防科技大学电子对抗学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为雷达信号处理及雷达对抗技术。

E-mail: kyacuichen@163.com



孙从易(1992-), 男, 山东青岛人, 国防科技大学电子对抗学院硕士生, 现就职于96630部队, 主要研究方向为MIMO雷达信号处理。

E-mail: 1337325128@163.com